15
16
17
18
19
20
21

МАТЕМАТИКА

2015 ЕГЭ

Под редакцией И. В. Ященко

Р. К. Гордин

ГЕОМЕТРИЯ. ПЛАНИМЕТРИЯ

ЗАДАЧА

18

ФГОС

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

Р. К. Гордин

ЕГЭ 2015. Математика
Задача 18
Геометрия. Планиметрия

Под редакцией И. В. Ященко

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2015

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Г68

Гордин Р. К.
ЕГЭ 2015. Математика. Задача 18. Геометрия. Планиметрия
Под ред. И. В. Ященко
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2015
223 с.
ISBN 978-5-4439-2120-4

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2015. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче единого государственного экзамена по математике в 2015 году. В рабочей тетради представлены задачи по одной позиции контрольных измерительных материалов ЕГЭ-2015.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль уровня основных арифметических навыков и умения решать текстовые задачи. Рабочая тетрадь ориентирована на один учебный год, однако при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускника.

Тетрадь предназначена для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

Подготовлено на основе книги: *Гордин Р. К.* ЕГЭ 2015. Математика. Задача 18. Геометрия. Планиметрия / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2015. — 224 с.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2120-4

Предисловие

Это учебное пособие предназначено для подготовки к решению задачи 18 ЕГЭ по математике.

Предполагается, что школьник освоил школьный курс планиметрии с оценкой не ниже 4. Перед работой с этим задачником необходимо повторить основные определения и теоремы из школьного учебника. Это также полезно делать и в процессе работы с книгой.

Пособие начинается с диагностической работы. В ней 15 задач на различные темы. Если в течение двух-трёх часов вы решите не менее половины задач этой работы, то можно приступать к работе с основными разделами задачника. Если же большинство задач окажется вам не по силам, то, скорее всего, за оставшееся до экзамена время вам не удастся достигнуть уровня, необходимого для успешного решения задачи 18. В этом случае разумнее использовать это время для подготовки к другим задачам ЕГЭ по математике.

По какому принципу устроены разделы задачника? Прежде всего рассматриваются геометрические конфигурации, наиболее часто встречающиеся в задачах школьного курса: касающиеся окружности, пересекающиеся окружности, вписанные и описанные окружности треугольника и четырёхугольника и т. д., способы нахождения различных элементов геометрических фигур — медиан, высот, биссектрис треугольника, радиусов вписанных и описанных окружностей и т. д., а также некоторые общеизвестные методы решения геометрических задач — метод площадей, метод вспомогательной окружности, удвоение медианы и т. п.

Каждый из 15 разделов начинается с разбора соответствующей задачи диагностической работы (если вы решили эту задачу не тем способом, который приводится нами, это тоже хорошо: главное, что задача решена правильно). Затем формулируются некоторые утверждения, помогающие решить задачи данного раздела. Во многих случаях это факты, которые не рассматриваются в школьных учебниках в качестве основных, но часто содержатся после соответствующих глав учебника в качестве задач. После этого приводятся примеры решения задач с использованием этих фактов.

Раздел заканчивается списком задач для самостоятельного решения. Первая часть списка — подготовительные задачи — состоит из относительно простых задач, решаемых в два-три хода. Вторая часть — тренировочные задачи — состоит из более сложных задач, уровень которых, за исключением задач со «звёздочкой», примерно соответствует уровню задач 18. Задачи со «звёздочкой» выше этого уровня. Решив по 6—7 тренировочных задач, вы можете приступать к диагностическим работам, расположенным в конце пособия. В каждой такой работе 6 задач. Работа рассчитана примерно на 2 часа. Если за это время вы решаете не менее пяти задач — это отличный результат. Если менее четырёх, рекомендуем ещё порешать тренировочные задачи, а после этого возвратиться к диагностическим работам.

Напомним, что задача считается решённой, если найдены все её решения и даны обоснования всех использованных утверждений. Разумеется, при этом можно ссылаться на теоремы из школьного учебника. Обратите внимание, что многие из задач 18 имеют более одного решения.

Ко всем задачам даются ответы, а к некоторым наиболее трудным — и указания.

В приложении приводятся различные интересные и полезные факты элементарной геометрии. Их можно использовать при решении задач на экзамене, но при этом если они не входят в школьный учебник, то в экзаменационной работе необходимо привести их доказательства.

Диагностическая работа

1. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна c и $\angle ABC = \alpha$. Найдите все медианы в этом треугольнике.

2. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Известно, что $\dfrac{\sin\angle ABM}{\sin\angle CBM} = \dfrac{1}{2}$. Найдите отношение $\dfrac{BC}{AB}$.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются под углом 60°, а их длины относятся как $1:3$. Чему равна меньшая диагональ четырёхугольника $ABCD$, если большая равна $\sqrt{39}$?

4. Найдите площадь трапеции с основаниями 18 и 13 и боковыми сторонами 3 и 4.

5. Стороны треугольника равны 3 и 6, а угол между ними равен 60°. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины этого угла.

6. Точки M и N — середины сторон соответственно BC и CD параллелограмма $ABCD$. Отрезки AM и BN пересекаются в точке O. Найдите отношение $\dfrac{MO}{OA}$.

7. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Известно, что площадь треугольника DEF равна 5. Найдите площадь треугольника ABC.

8. Из точки M, лежащей вне окружности с центром O и радиусом R, проведены касательные MA и MB (A и B — точки касания). Прямые OA и MB пересекаются в точке C. Найдите OC, если известно, что отрезок OM делится окружностью пополам.

9. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C. Прямая касается этих окружностей в различных точках A и B соответственно. Найдите угол AO_2B, если известно, что $\operatorname{tg}\angle ABC = \dfrac{1}{2}$.

10. На катетах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены окружности. Найдите их общую хорду, если катеты равны 3 и 4.

11. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами 13, 13, 24 и расстояние между центрами этих окружностей.

12. На продолжении диаметра AB окружности отложен отрезок BC, равный диаметру. Прямая, проходящая через точку C, касается окружности в точке M. Найдите площадь треугольника ACM, если радиус окружности равен R.

13. Окружность S_1 проходит через центр окружности S_2 и пересекает её в точках A и B. Хорда AC окружности S_1 касается окружности S_2 в точке A и делит первую окружность на дуги, градусные меры которых относятся как $5:7$. Найдите градусные меры дуг, на которые окружность S_2 делится окружностью S_1.

14. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D, причём $\angle BCD = \angle BAC$. Известно, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Найдите CD.

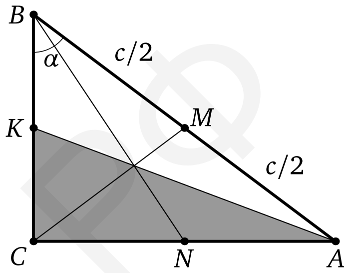
15. Углы при вершинах A и C треугольника ABC равны $45°$ и $60°$ соответственно; AM, BN и CK — высоты треугольника. Найдите отношение $\frac{MN}{KN}$.

§ 1. Медиана прямоугольного треугольника. Решение задачи 1 из диагностической работы

1. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна c и $\angle ABC = \alpha$. Найдите все медианы в этом треугольнике.

Ответ: $\frac{c}{2}$, $\frac{c}{2}\cdot\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$, $\frac{c}{2}\cdot\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$.

Р е ш е н и е. Поскольку медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, медиана CM равна $\frac{c}{2}$.



Пусть K — середина BC. Тогда $CK = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB\cos\alpha = \frac{1}{2}c\cos\alpha$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ACK находим, что

$$AK = \sqrt{AC^2+CK^2} = \sqrt{(AB\sin\alpha)^2 + \left(\frac{1}{2}AB\cos\alpha\right)^2} =$$

$$= \frac{c}{2}\sqrt{4\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{c}{2}\sqrt{4\sin^2\alpha+1-\sin^2\alpha} = \frac{c}{2}\sqrt{1+3\sin^2\alpha}.$$

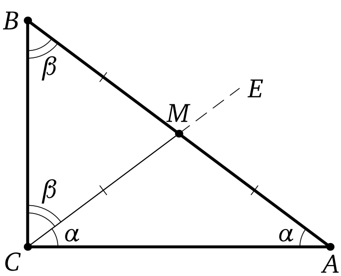
Аналогично находим медиану BN. ◁

* * *

Теорема. *Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C. Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Тогда $\alpha + \beta = 90^\circ$.

От луча CA в полуплоскость, содержащую точку B, отложим угол ACE, равный α. Тогда луч CE проходит между сторонами угла ACB, так как $\alpha = \angle ACE < \angle ACB = 90^\circ$. Поэтому сторона CE этого угла пересекает гипотенузу AB в некоторой точке M.



Треугольник AMC равнобедренный, поскольку $\angle ACM = \angle CAM$, значит, $CM = AM$. С другой стороны, треугольник BMC также равнобедренный, поскольку

$$\angle BCM = 90^\circ - \angle ACM = 90^\circ - \alpha = \beta = \angle CBM.$$

Значит, $CM = BM$. Следовательно, M — середина гипотенузы AB, т. е. CM — медиана треугольника ABC и $CM = \frac{1}{2}AB$. Что и требовалось доказать. □

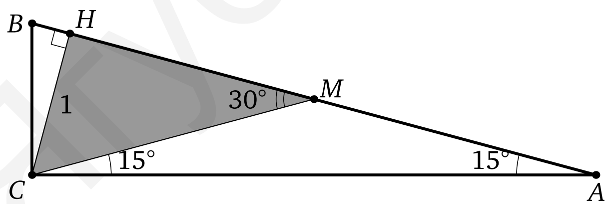
Теорема (обратная). *Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.*

Рассмотрим несколько примеров применения доказанного выше свойства медианы прямоугольного треугольника, проведённой из вершины прямого угла.

Пример 1. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом 15°, если известно, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1.

Ответ: 1.

Р е ш е н и е. Пусть CH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла C, $\angle A = 15^\circ$. Проведём медиану CM. Тогда $\angle CMH$ — внешний угол равнобедренного треугольника AMC, поэтому $\angle CMH = 30^\circ$. Из прямоугольного тре-

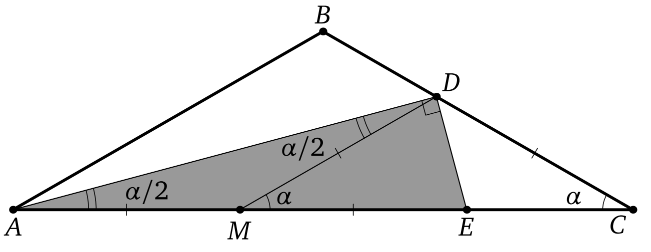


угольника CMH находим, что $CM = 2CH = 2$. Следовательно, $AB = 2CM = 4$. ◁

Пример 2. Через основание биссектрисы AD равнобедренного треугольника ABC с вершиной B проведён перпендикуляр к этой биссектрисе, пересекающий прямую AC в точке E. Найдите отрезок AE, если известно, что $CD = 4$.

Ответ: 8.

Р е ш е н и е. Отметим середину M отрезка AE. Отрезок DM — медиана прямоугольного треугольника ADE, проведённая из вершины прямого угла, поэтому $AM = DM = ME$.



Обозначим $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle DME = \angle DAC + \angle ADM = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha = \angle DCM,$$

значит, треугольник CDM равнобедренный. Следовательно, $AE = 2DM = 2DC = 8$. ◁

Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

1.1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4. Найдите радиус описанной окружности.

1.2. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении $1:2$. Найдите стороны треугольника.

1.3. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами 8 и 9. Найдите стороны треугольника.

1.4. В треугольнике ABC к стороне AC проведены высота BK и медиана MB, причём $AM = BM$. Найдите косинус угла KBM, если $AB = 1$, $BC = 2$.

1.5. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении $1:3$. Найдите острые углы треугольника.

1.6. Точка D — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник ACD, касается отрезка CD в его середине. Найдите острые углы треугольника ABC.

1.7. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CL и медиана CM. Найдите площадь треугольника ABC, если $LM = a$, $CM = b$.

1.8. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите отрезок CN, если катеты равны 1 и 4.

1.9. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна a и образует угол α с медианой, проведённой из той же вершины. Найдите катеты треугольника.

Тренировочные задачи

1.10. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами m и n. Найдите стороны треугольника.

1.11. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведены высота CD и медиана CE. Площади треугольников ABC и CDE равны соответственно 10 и 3. Найдите AB.

1.12. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB и AC равны 4 и 3 соответственно. Точка D делит гипотенузу BC пополам. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ADC и ABD.

1.13. Катет прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол равен 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведённой из вершины прямого угла.

1.14. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P. Отрезок, соединяющий вершину C с серединой M отрезка AD, равен $\frac{5}{4}$, $AP=1$. Расстояние от точки P до отрезка BC равно $\frac{1}{2}$. Найдите AD, если известно, что вокруг четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

1.15. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60°. Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.

1.16. Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны 40° и 50°. Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1.

1.17. Диагонали трапеции перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найдите площадь трапеции.

1.18. Прямая, параллельная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, пересекает катет AC в точке D, а катет BC — в точке E, причём $DE=2$, а $BE=1$. На гипотенузе взята такая точка F, что $BF=1$. Известно также, что $\angle FCB=\alpha$. Найдите площадь треугольника ABC.

1.19. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности радиуса 10. Вершина C лежит на диаметре окружности, который параллелен гипотенузе. Угол CAB равен 75°. Найдите площадь треугольника ABC.

1.20. Гипотенуза KM прямоугольного треугольника KMP является хордой окружности радиуса $\sqrt{7}$. Вершина P находится на диаметре, который параллелен гипотенузе. Расстояние от центра окружности до гипотенузы равно $\sqrt{3}$. Найдите острые углы треугольника KMP.

1.21. В треугольнике ABC известно, что $AB=c$, $AC=b$ $(b>c)$, AD — биссектриса. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная AD и пересекающая AC в точке E. Найдите AE.

1.22. Точка E лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC; точка K — середина отрезка AE. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно прямой AB, и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно прямой BC, пересекаются в точке D. Найдите углы треугольника BKD.

1.23. В трапеции $ABCD$ точка K — середина основания AB, M — середина основания CD. Найдите площадь трапеции, если известно, что DK — биссектриса угла D, BM — биссектриса угла B, наибольший из углов при основании AB равен $60°$, а периметр равен 30.

1.24*. В треугольнике ABC известны углы: $\angle A = 45°$, $\angle B = 15°$. На продолжении стороны AC за точку C взята точка M, причём $CM = 2AC$. Найдите угол AMB.

1.25*. В треугольнике ABC известно, что $AB = AC$ и угол BAC тупой. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC, M — основание перпендикуляра, опущенного из A на сторону BC, E — основание перпендикуляра, опущенного из D на сторону BC. Через точку D проведён также перпендикуляр к BD до пересечения со стороной BC в точке F. Известно, что $ME = FC = a$. Найдите площадь треугольника ABC.

1.26*. Острый угол при вершине A ромба $ABCD$ равен $40°$. Через вершину A и середину M стороны CD проведена прямая, на которую опущен перпендикуляр BH из вершины B. Найдите угол AHD.

Задачи на доказательство и вычисление

1.27. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB=BC=CD=\frac{1}{2}AD$.

а) Докажите, что $AC\perp CD$.

б) Найдите углы трапеции.

1.28. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC с углом 30° при вершине A. Окружность, вписанная в треугольник BMC, касается его сторон BC и BM в точках P и Q.

а) Докажите, что $PQ\parallel CM$.

б) Найдите PQ, если известно, что $AB=8$.

1.29. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что $CM\perp DK$.

б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

1.30. Из вершины C тупого угла треугольника ABC проведена высота CH. Точку H соединили с серединами M и N сторон AC и BC.

а) Докажите, что в четырёхугольник $CMHN$ можно вписать окружность.

б) Найдите её радиус, если сумма сторон AC и BC равна 20, а площадь треугольника ABC равна 24.

1.31. Точка E расположена вне квадрата $ABCD$ с центром O, причём треугольник BEC прямоугольный ($\angle E=90^\circ$) и неравнобедренный. Точка M — середина стороны BC.

а) Докажите, что треугольник OME равнобедренный.

б) Прямая EO пересекает сторону AD квадрата в точке K. Найдите отношение $AK:KD$, если известно, что $\angle CBE=30^\circ$.

1.32. Две стороны треугольника равны 1 и 5, площадь треугольника равна 2. Медиана, проведённая к его третьей стороне, меньше её половины.

а) Докажите, что треугольник тупоугольный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

1.33. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки M и N — середины отрезков AB и CH соответственно.

а) Докажите, что треугольники A_1MB_1 и A_1NB_1 равнобедренные.

б) Найдите площадь четырёхугольника A_1MB_1N, если известно, что $A_1B_1=6$ и $MN=4$.

1.34. Дан треугольник ABC. Точки M_1, M_2, M_3 — середины сторон AB, BC и AC, а точки H_1, H_2, H_3 — основания высот, лежащие на тех же сторонах.

а) Докажите, что из отрезков H_1M_2, H_2M_3 и H_3M_1 можно построить треугольник.

б) Найдите его периметр, если периметр треугольника ABC равен a.

1.35. Высота AH и медиана AM треугольника ABC делят угол BAC треугольника ABC на три равные части, причём точка H лежит между B и M. Из точки M опущен перпендикуляр MK на сторону AC.

а) Докажите, что $MK=BH$.

б) Найдите углы треугольника ABC.

1.36. Медианы AM и BN треугольника ABC перпендикулярны и пересекаются в точке P.

а) Докажите, что $CP=AB$.

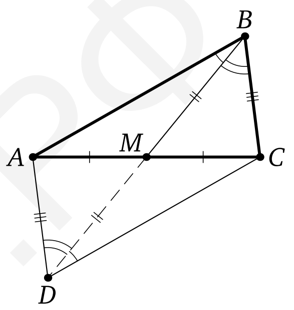
б) Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AC=3$ и $BC=4$.

§ 2. Удвоение медианы. Решение задачи 2 из диагностической работы

2. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Известно, что $\frac{\sin\angle ABM}{\sin\angle CBM} = \frac{1}{2}$. Найдите отношение $\frac{BC}{AB}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. На продолжении медианы BM за точку M отложим отрезок MD, равный BM. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ делятся точкой пересечения M пополам, значит, $ABCD$ — параллелограмм. Поэтому



$$AD = BC \quad \text{и} \quad \angle ADB = \angle CBM.$$

По теореме синусов из треугольника ABD находим, что

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle ADB} = \frac{\sin\angle ABM}{\sin\angle CBM} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$. ◁

* * *

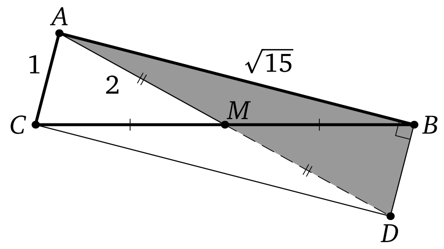
Во многих случаях для решения задачи удобно применить такое дополнительное построение, мы будем называть его удвоением медианы.

На продолжении медианы AM треугольника ABC за точку M отложим отрезок MD, равный AM. Тогда диагонали AD и BC четырёхугольника $ABDC$ точкой пересечения M делятся пополам, значит, $ABDC$ — параллелограмм. Далее применяем свойства параллелограмма.

Пример 1. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$, а медиана, проведённая к третьей, равна 2.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

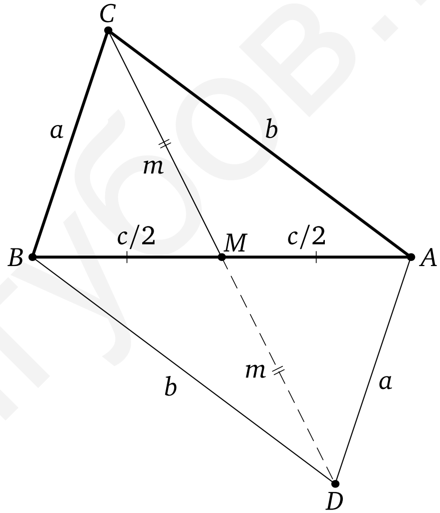
Р е ш е н и е. Пусть AM — медиана треугольника ABC, $AM = 2$, $AB = \sqrt{15}$, $AC = 1$. На продолжении медианы AM за точку M отложим отрезок MD, равный AM. Тогда $ABDC$ — параллелограмм, поэтому $BD = AC = 1$.



Треугольник ABD прямоугольный, так как $AD^2 = AB^2 + BD^2$. Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} = \frac{\sqrt{15}}{2}. \qquad \triangleleft$$

Пример 2. Стороны треугольника равны a, b, c. Докажите, что медиана, проведённая к стороне c, равна $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$.



Доказательство. Пусть $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ — стороны треугольника ABC; $CM = m$ — медиана треугольника.

На продолжении медианы CM за точку M отложим отрезок MD, равный CM. Тогда $ACBD$ — параллелограмм. Поэтому

$$CD^2 + AB^2 = 2(AC^2 + BC^2), \quad \text{или} \quad 4m^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2).$$

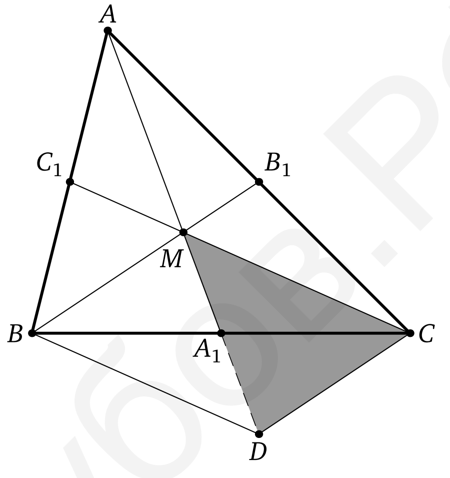
Отсюда находим, что

$$m^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2). \qquad \square$$

Пример 3. Площадь треугольника ABC равна S. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC.

Ответ: $\frac{3}{4}S$.

Р е ш е н и е. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, S — площадь треугольника ABC, S' — площадь треугольника, составленного из медиан треугольника ABC.



На продолжении медианы MA_1 треугольника BMC за точку A_1 отложим отрезок A_1D, равный MA_1. Медианы треугольника делятся их точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины, поэтому $MD = 2A_1M = AM = \frac{2}{3}AA_1$. Четырёхугольник $MBDC$ — параллелограмм, поэтому $CD = BM = \frac{2}{3}BB_1$. Кроме того, $CM = \frac{2}{3}CC_1$.

Таким образом, треугольник, составленный из медиан треугольника ABC, подобен треугольнику MDC, причём коэффициент подобия равен $\frac{3}{2}$, значит, $S' = \frac{9}{4}S_{\Delta MDC}$.

Известно, что медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников, поэтому

$$S_{\Delta A_1MC} = \frac{1}{6}S, \quad \text{а} \quad S_{\Delta MDC} = 2S_{\Delta A_1MC} = \frac{1}{3}S.$$

Следовательно,

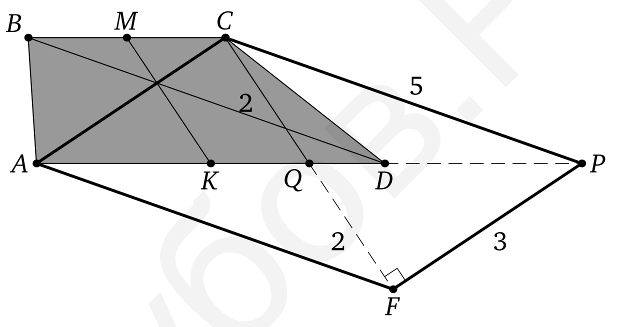
$$S' = \frac{9}{4}S_{\Delta MDC} = \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3}S = \frac{3}{4}S. \qquad \triangleleft$$

Пример 4. Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 6.

Р е ш е н и е. Пусть M и K — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$, $AC = 3$, $BD = 5$. Через вершину C меньшего основания BC проведём прямую, параллельную диагонали BD, до пересечения с прямой AD в точке P и прямую, параллельную MK, до пересечения с прямой AD в точке Q. Тогда

$$AQ = AK + KQ = AK + MC = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(AD + DP) = \frac{1}{2}AP,$$



поэтому CQ — медиана треугольника ACP. Теперь известно, что

$$CQ = MK = 2, \quad AC = 3, \quad CP = BD = 5, \quad S_{ABCD} = S_{\Delta ACP}.$$

На продолжении медианы CQ за точку Q отложим отрезок QF, равный CQ. Стороны треугольника CFP равны:

$$CF = 2CQ = 4, \quad CP = BD = 5, \quad FP = AC = 3.$$

Этот треугольник прямоугольный ($CP^2 = CF^2 + PF^2$), поэтому

$$S_{\Delta CFP} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot PF = 6.$$

Следовательно,

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ACP} = S_{\Delta CFP} = 6.$$

(Кстати, отрезок MK проходит через точку пересечения диагоналей трапеции, но это нам не понадобилось.) ◁

Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

2.1. Медиана AM треугольника ABC равна m и образует со сторонами AB и AC углы α и β соответственно. Найдите эти стороны.

2.2. В треугольнике ABC известно, что BD — медиана, $BD=AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$, а $\angle DBC=90°$. Найдите угол ABD.

2.3. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 27 и 29, а медиана, проведённая к третьей, равна 26.

2.4. Стороны треугольника равны 11, 13 и 12. Найдите медиану, проведённую к большей стороне.

2.5. В треугольнике две стороны равны 11 и 23, а медиана, проведённая к третьей, равна 10. Найдите третью сторону.

2.6. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4, проведена медиана к боковой стороне. Найдите основание треугольника, если медиана равна 3.

2.7. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана, проведённая к боковой стороне, равна 5. Найдите боковые стороны.

2.8. В треугольнике ABC известны стороны $AB=2$ и $AC=4$ и медиана $AM=\sqrt{7}$. Найдите угол BAC.

2.9. В треугольнике ABC отрезок AD — медиана, $AD=m$, $AB=a$, $AC=b$. Найдите угол BAC.

Тренировочные задачи

2.10. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведённая к третьей, равна 5. Найдите площадь треугольника.

2.11. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 3, 4 и 5.

2.12. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 10, 10 и 16.

2.13. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 12, 15 и 21.

2.14. Медиана AD и высота CE равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $CP=5$, $PE=2$.

2.15. Медиана AM и биссектриса CD прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если $CO = 9$, $OD = 5$.

2.16*. Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C отмечена точка O, причём $OA = OB = b$. Известно также, что CD — высота треугольника ABC, точка E — середина отрезка OC, $DE = a$. Найдите CE.

Задачи на доказательство и вычисление

2.17. Медиана AM треугольника ABC продолжена за точку M на расстояние $MD = AM$.

а) Докажите, что $CD = AB$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = 10$, $AC = 12$, $AM = 5$.

2.18. 2. В треугольнике ABC высота BD равна 6, медиана CE равна 5, расстояние от точки пересечения отрезков BD и CE до стороны AC равно 1.

а) Докажите, что $CD : AD = 1 : 4$.

б) Найдите площадь треугольника AEC.

2.19. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 3$, $AC = \sqrt{73}$ и медианой $AM = 4$.

а) Докажите, что медиана AM перпендикулярна стороне AB.

б) Найдите высоту треугольника ABC, проведённую из вершины A.

2.20. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 6$, $BC = 10$ и $\angle ACB = 30^\circ$.

2.21. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD относятся как 1:2. Пусть K — середина диагонали AC. Прямая DK пересекает сторону AB в точке L.

а) Докажите, что $AL = 2BL$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BCKL$, если известно, что площадь трапеции $ABCD$ равна 9.

2.22. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 30$.

2.23. Медиана AM и высота CH равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке K. Известно, что $CK = 5$, $KH = 1$.

а) Докажите, что $AH : BH = 1 : 4$.

б) Найдите площадь треугольника ABC.

2.24. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны.

а) Докажите, что $CE = 2AE$.

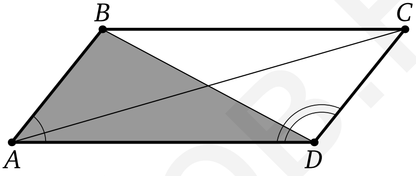
б) Найдите стороны треугольника ABC, если известно, что $BE = AD = 8$.

§ 3. Параллелограмм. Средняя линия треугольника. Решение задачи 3 из диагностической работы

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются под углом 60°, а их длины относятся как $1:3$. Чему равна меньшая диагональ четырёхугольника $ABCD$, если большая равна $\sqrt{39}$?

Ответ: $\sqrt{21}$.

Р е ш е н и е. Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, стороны которого параллельны диагоналям четырёхугольника и соответственно равны их половинам.



Обозначим через x и $3x$ половины диагоналей параллелограмма. Поскольку угол между ними равен 60°, то по теореме косинусов квадраты сторон параллелограмма равны

$$x^2+9x^2-3x^2=7x^2, \quad x^2+9x^2+3x^2=13x^2.$$

Поскольку бо́льшая диагональ четырёхугольника равна $\sqrt{39}$, бо́льшая сторона параллелограмма равна $\frac{\sqrt{39}}{2}$, т. е. $13x^2=\frac{39}{4}$, откуда $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда меньшая сторона параллелограмма равна $x\sqrt{7}=\frac{\sqrt{21}}{2}$. Следовательно, меньшая диагональ данного четырёхугольника равна $\sqrt{21}$. ◁

* * *

Для решения задач этого раздела нужно знать свойства и признаки параллелограмма, теорему о средней линии треугольника, теорему о медианах треугольника (медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника), а также следующие важные факты.

Теорема. *Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.*

Доказательство. Пусть AC и BD — диагонали параллелограмма $ABCD$. По теореме косинусов из треугольников ABD и ACD находим, что

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD,$$

$$\begin{aligned} AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC = \\ = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos(180^\circ - \angle BAD) = \\ = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot CD \cos \angle BAD. \end{aligned}$$

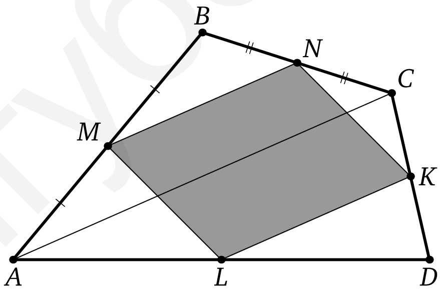
Следовательно,

$$BD^2 + AC^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot AD^2.$$

Теорема доказана. □

Теорема. *Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.*

Доказательство. Пусть M, N, K, L — середины сторон соответственно AB, BC, CD, AD четырёхугольника $ABCD$. Поскольку MN — средняя линия треугольника ABC, то $MN = \frac{1}{2}AC$ и $MN \parallel AC$. Аналогично докажем, что $KL = \frac{1}{2}AC$ и $KL \parallel AC$. Значит, $MN = KL$ и

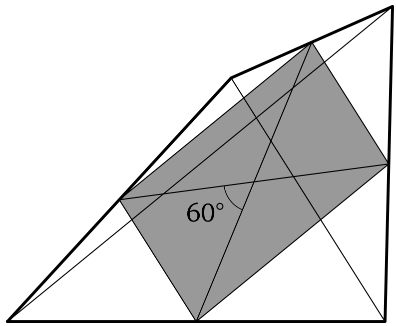


$MN \parallel KL$. Следовательно, четырёхугольник $MNKL$ — параллелограмм. Теорема доказана. □

Пример 1. В выпуклом четырёхугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны соответственно a и b и пересекаются под углом 60°. Найдите диагонали четырёхугольника.

Ответ: $\sqrt{a^2+b^2+ab}$, $\sqrt{a^2+b^2-ab}$.

Решение. Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. В данном случае диагонали параллелограмма равны a и b, а угол между ними равен 60°.



Стороны параллелограмма найдём по теореме косинусов:

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+ab}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-ab}.$$

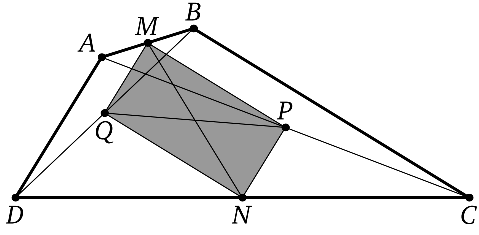
Следовательно, диагонали данного четырехугольника равны

$$\sqrt{a^2+b^2+ab} \quad \text{и} \quad \sqrt{a^2+b^2-ab}. \qquad \triangleleft$$

Пример 2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна 1. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.

Ответ: 1.

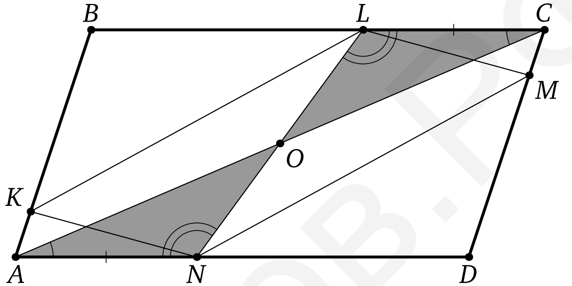
Решение. Пусть M и N — середины сторон соответственно AB и CD четырёхугольника $ABCD$, а P и Q — середины его диагоналей (соответственно AC и BD). Тогда MP — средняя линия треугольника ABC, а QN — средняя линия треугольника DBC. Поэтому $MP=\frac{1}{2}BC=QN$, $MP \parallel BC \parallel QN$.



Значит, четырёхугольник $MPNQ$ — параллелограмм. Его соседние стороны MP и MQ соответственно параллельны прямым BC и AD, поэтому $MP \perp MQ$. Следовательно, четырёхугольник $MPNQ$ — прямоугольник. Диагонали прямоугольника равны, поэтому $PQ=MN=1$. ◁

Пример 3. Вершины одного параллелограмма лежат по одной на сторонах другого. Докажите, что центры параллелограммов совпадают.

Доказательство. Пусть вершины K, L, M и N параллелограмма $KLMN$ лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$, а диагональ LN первого параллелограмма пересекается с диагональю AC второго в точке O.



Треугольники CLM и ANK равны по стороне и прилежащим к ней углам, поэтому $CL=AN$. Тогда треугольники COL и AON также равны по стороне и прилежащим к ней углам, значит, $CO=AO$ и $LO=ON$. Таким образом, точка O — общая середина диагонали LN параллелограмма $KLMN$ и диагонали AC параллелограмма $ABCD$, т. е. O — общий центр этих параллелограммов. Что и требовалось доказать. □

Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

3.1. Расстояние между серединами взаимно перпендикулярных хорд AC и BC некоторой окружности равно 10. Найдите диаметр окружности.

3.2. Диагональ параллелограмма делит его угол на части в 30° и 45°. Найдите отношение сторон параллелограмма.

3.3. Вершины M и N квадрата $KLMN$ лежат на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC (N между B и M), а вершины K и L — на катетах BC и AC соответственно. Известно, что $AM = a$ и $BN = b$. Найдите площадь квадрата.

3.4. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Биссектрисы углов A и B пересекают прямую CD в точках M и N, причём $MN = 12$. Найдите стороны параллелограмма.

3.5. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый угол ромба равен 30°, а сторона равна 4.

3.6. В четырёхугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle DBC = 90^\circ$. Кроме того, $DB = a$, $DC = b$. Найдите расстояние между центрами двух окружностей, одна из которых проходит через точки D, A, B, а другая — через точки B, C, D.

3.7. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AKCM$ — ромб. Диагональ AC образует со стороной AB угол 30°. Найдите сторону ромба, если наибольшая сторона прямоугольника $ABCD$ равна 3.

Тренировочные задачи

3.8. В треугольник, две из трёх сторон которого равны 9 и 15, вписан параллелограмм так, что одна из его сторон, равная 6, лежит на третьей стороне треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны двум данным сторонам треугольника. Найдите другую сторону параллелограмма и третью сторону треугольника.

3.9. Стороны параллелограмма равны a и b ($a \neq b$). Найдите диагонали четырёхугольника, образованного пересечениями биссектрис углов параллелограмма.

3.10. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, взаимно перпендикулярны и равны 2 и 7. Найдите площадь четырёхугольника.

3.11. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равны между собой. Найдите площадь четырёхугольника, если его диагонали равны 8 и 12.

3.12. Дан выпуклый четырёхугольник, диагонали которого перпендикулярны и равны a и b. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах сторон данного.

3.13. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 5. Найдите отрезок, соединяющий середины оснований.

3.14. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны a и b, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны между собой. Найдите площадь четырёхугольника.

3.15. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны c и d и пересекаются под углом 45°. Найдите отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника.

3.16. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD относятся как $1:4$, а угол между ними равен 60°. Чему равен больший из отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$, если меньший равен $\sqrt{26}$?

3.17. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через вершину B и середину стороны BC. Найдите углы параллелограмма.

3.18. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешних углов B и C. Известно, что периметр треугольника ABC равен 10. Найдите PM.

3.19. Прямая имеет с параллелограммом $ABCD$ единственную общую точку B. Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния, равные a и b. На какое расстояние удалена от этой прямой вершина D?

3.20. Гипотенуза прямоугольного треугольника служит стороной квадрата, расположенного вне треугольника. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата, если катеты треугольника равны a и b.

3.21. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AD и BC. Найдите угол, образованный продолжением сторон AB и CD.

3.22. Дан параллелограмм со сторонами 1 и 2 и острым углом 60°. На двух его противоположных сторонах как на основаниях построены вне параллелограмма равнобедренные треугольники с углами 120° при вершинах. Найдите расстояние между этими вершинами.

3.23. Четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром O. Найдите расстояние от точки O до стороны AB, если известно, что $CD = 8$.

3.24*. Точки M, K, N и L — середины сторон соответственно AB, BC, CD и DE пятиугольника $ABCDE$, P и Q — середины отрезков MN и KL соответственно. Известно, что $PQ = 1$. Найдите сторону AE.

Задачи на доказательство и вычисление

3.25. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны, пересекаются в точке P, отличной от O, и не проходят через точку O. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно.

а) Докажите, что прямая OP проходит через середину отрезка MN.

б) Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$, если известно, что $AC=BD$, а $MN=10$.

3.26. В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга и трёх сторон параллелограмма каждая.

а) Докажите, что одна из сторон параллелограмма видна из центра одной из окружностей под прямым углом.

б) Найдите площадь параллелограмма, если известно, что радиус одной из окружностей равен 2, а один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания с одной из окружностей равен 4.

3.27. Отрезок, соединяющий вершину A ромба $ABCD$ с серединой стороны BC, равен стороне ромба.

а) Докажите, что высота ромба, проведённая из вершины C, делит сторону AD на отрезки, один из которых втрое больше другого.

б) Найдите диагональ AC ромба, если известно, что сторона ромба равна $\sqrt{6}$.

3.28. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M, причём $AM:MB=2:1$. Найдите диагональ AC, если известно, что $AD=\sqrt{6}$.

3.29. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB=4$, $BC=8$ и $AC=10$.

3.30. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1, K и M — основания перпендикуляров, опущенных из точки B на прямые AA_1 и CC_1.

а) Докажите, что $MK \parallel AC$.

б) Найдите площадь треугольника KBM, если известно, что $AC=10$, $BC=6$, $AB=8$.

3.31. Точки E, F, G и H — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно.

а) Докажите, что отрезки EG, FH и MN пересекаются в одной точке.

б) Найдите отношение площадей четырёхугольников $EMGN$ и $FMHN$, если $AC = BD$, $AC \perp BD$, а прямые MN и FH пересекаются под углом α.

3.32. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BDC, касаются диагонали BD в точках M и N соответственно. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются диагонали AC в точках K и L соответственно.

а) Докажите, что $MKNL$ — прямоугольник.

б) Найдите его площадь, если известно, что $BC - AB = 4$, а угол между диагоналями параллелограмма $ABCD$ равен $30°$.

3.33. В равнобедренном треугольнике ABC с углом $120°$ при вершине A проведена биссектриса BD. В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона HF лежит на отрезке BC, а вершина E — на отрезке AB.

а) Докажите, что $FH = 2DH$.

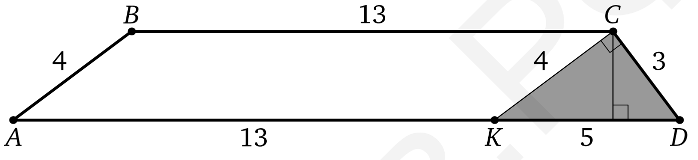
б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.

§ 4. Трапеция. Решение задачи 4 из диагностической работы

4. Найдите площадь трапеции с основаниями 18 и 13 и боковыми сторонами 3 и 4.

Ответ: 37,2.

Р е ш е н и е. Через вершину C меньшего основания BC трапеции $ABCD$ ($BC = 13$, $AD = 18$, $AB = 4$, $CD = 3$) проведём прямую, параллельную боковой стороне AB, до пересечения с основанием AD в точке K. Тогда $CK = AB = 4$, $DK = AD - AK = AD - BC = 18 - 13 = 5$, $CD = 3$.



Треугольник KCD прямоугольный, так как $KD^2 = CD^2 + CK^2$. Его высота, опущенная на гипотенузу, равна $\frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$. Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{18+13}{2} \cdot \frac{12}{5} = 37{,}2. \qquad \triangleleft$$

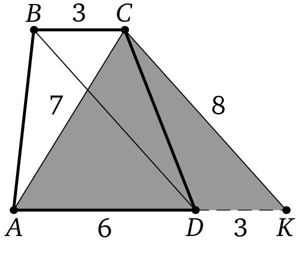
* * *

При решении задач на трапецию во многих случаях полезны дополнительные построения, связанные с параллельным переносом боковой стороны или диагонали.

Пример 1. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 7 и 8, а основания — 3 и 6.

Ответ: $12\sqrt{5}$.

Р е ш е н и е. Через вершину C меньшего основания BC трапеции $ABCD$ ($BC = 3$, $AD = 6$, $BD = 8$, $AC = 7$) проведём прямую, параллель-



ную диагонали BD, до пересечения с прямой AD в точке K. Стороны треугольника ACK равны:

$$AC = 7, \quad CK = BD = 8, \quad AK = AD + DK = AD + BC = 6 + 3 = 9.$$

По формуле Герона

$$S_{\Delta ACK} = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 6 \cdot 2\sqrt{5} = 12\sqrt{5},$$

а так как треугольники CDK и ABC равновелики, получаем

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ACK} = 12\sqrt{5}. \qquad \triangleleft$$

* * *

При решении задач, связанных с *равнобедренной* трапецией, кроме общеизвестных свойств и признаков (углы при основании равны, диагонали равны и образуют равные углы с основанием и т. д.) иногда полезно применить следующее свойство: проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме.

Пример 2. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC $(AD > BC)$ вписана в окружность с центром O. Известно, что $\sin\angle AOB = \frac{3}{5}$, а средняя линия трапеции равна a. Найдите высоту трапеции.

Ответ: $3a$ или $\frac{1}{3}a$.

Р е ш е н и е. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность, поэтому она равнобедренная. Обозначим $\angle AOB = \alpha$. Поскольку AOB — центральный угол окружности, а ADB — вписанный,

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{\alpha}{2}.$$

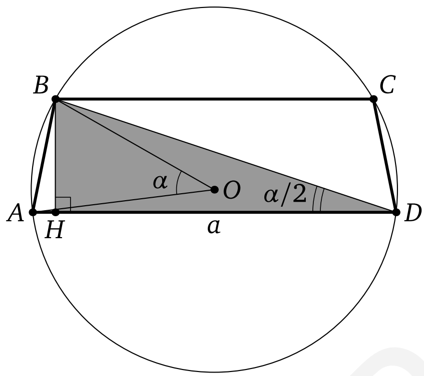
Пусть BH — высота трапеции. Тогда $DH = \frac{AD + BC}{2}$, т. е. катет DH прямоугольного треугольника BHD равен средней линии трапеции. Следовательно, $BH = DH \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = a \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

По условию задачи $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, поэтому

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

или

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\frac{4}{5}.$$



Тогда

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}}=\frac{1}{3}$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{5}}=3.$$

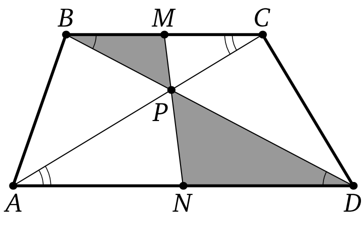
Следовательно, $BD=a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}a$ или $BD=3a$. $\lhd$

Отметим ещё одно важное свойство трапеции.

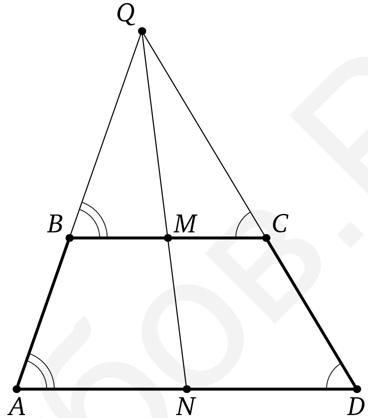
Иногда эту теорему называют замечательным свойством трапеции.

Теорема. *Точка пересечения диагоналей любой трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.*

Доказательство. Пусть диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения боковых сторон AB и CD — в точке Q.



Через середину M основания BC и точку P проведём прямую. Пусть она пересекает основание AD в точке N. Тогда треугольник BMP подобен треугольнику DNP, а треугольник CMP — треугольнику ANP, причём в обоих случаях коэффициент подобия равен $\frac{MP}{PN}$. Значит, $\frac{BM}{DN} = \frac{MP}{PN} = \frac{CM}{AN}$, а так как $BM = CM$, то $DN = \frac{BM \cdot AN}{CM} = AN$, т. е. N — середина основания AD. Следовательно, отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей.



Аналогично докажем, что прямая, проведённая через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения Q продолжений боковых сторон. Следовательно, точки P, Q и середины оснований трапеции лежат на одной прямой. Что и требовалось доказать. ☐

Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

4.1. Найдите площадь трапеции, параллельные стороны которой равны 16 и 44, а непараллельные — 17 и 25.

4.2. Найдите площадь трапеции с основаниями 11 и 4 и диагоналями 9 и 12.

4.3. В равнобедренной трапеции основания равны 40 и 24, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

4.4. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если её средняя линия равна 5.

4.5. Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

4.6. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 и образует угол 60° с основанием трапеции. Найдите среднюю линию трапеции.

4.7. Окружность с центром O вписана в трапецию с боковой стороной AB. Найдите угол AOB.

4.8. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3, а бо́льшая образует угол 30° с одним из оснований. Найдите это основание, если на нём лежит точка пересечения биссектрис углов при другом основании.

4.9. Основания трапеции равны 1 и 6, а диагонали — 3 и 5. Под каким углом видны основания из точки пересечения диагоналей?

4.10. Основания трапеции равны a и b $(a > b)$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

4.11. Основания равнобедренной трапеции равны a и b $(a > b)$, острый угол равен 45°. Найдите площадь трапеции.

Тренировочные задачи

4.12. В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 90°. Точка N лежит на основании BC, причём $BN : BC = 2 : 3$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN параллельна боковой стороне AB и делит площадь трапеции пополам. Найдите $AB : BC$.

4.13. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна S. Найдите среднюю линию трапеции, если острый угол при её основании равен α.

4.14. Окружность, вписанная в трапецию, касается одной из боковых сторон в точке, делящей её на отрезки, равные a и b. Найдите радиус окружности.

4.15. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса R. Найдите стороны трапеции, если её меньшее основание равно $\frac{4}{3}R$.

4.16. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна a, средняя линия равна b, а углы при большем основании равны $30°$. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

4.17. Основания трапеции равны 4 и 16. Найдите радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около неё, если известно, что эти окружности существуют.

4.18. Окружность вписана в равнобедренную трапецию с основаниями a и b. Найдите диагональ трапеции.

4.19. Известно, что высота трапеции равна 15, а диагонали трапеции равны 17 и 113. Чему равна площадь трапеции?

4.20. Боковые стороны трапеции лежат на перпендикулярных прямых. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах диагоналей и серединах оснований трапеции, если её боковые стороны равны a и b.

4.21. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если известно, что центр её описанной окружности лежит на большем основании.

4.22. Трапеция с высотой h вписана в окружность. Боковая сторона трапеции видна из центра окружности под углом $120°$. Найдите среднюю линию трапеции.

4.23. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на $20°$ больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если её диагональ равна 2.

4.24. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом её основании. Найдите стороны трапеции, если её высота равна 12, а длины биссектрис равны 15 и 13.

4.25. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, $\angle BOA = \angle COD = 60°$. Перпендикуляр BK, опущенный из вершины B на сторону AD, равен 6; BC в три раза меньше AD. Найдите площадь треугольника COD.

4.26. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3\sqrt{39}$ и $BC = \sqrt{39}$. Кроме того дано, что угол BAD равен $30°$, а угол ADC равен $60°$. Через точку D проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найдите длину отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

4.27. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60°. Найдите высоту трапеции.

4.28. В трапеции $ABCD$ известны боковые стороны $AB=27$, $CD=28$, основание $BC=5$ и $\cos\angle BCD=-\frac{2}{7}$. Найдите диагональ AC.

4.29. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое больше основания CD и вдвое больше боковой стороны AD. Диагональ AC равна a, а боковая сторона BC равна b. Найдите площадь трапеции.

4.30. Трапеция $ABCD$ разделена прямой, параллельной её основаниям AD и BC, на две равновеликие трапеции. Найдите отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, если основания трапеции равны a и b.

4.31. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол ADB в два раза меньше угла ACB. Известно, что $BC=AC=5$ и $AD=6$. Найдите площадь трапеции.

4.32. Дана трапеция $ABCD$, диагонали AC и BD которой пересекаются под прямым углом, а продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K под углом 30°. Известно, что $\angle BAC=\angle CDB$, а площадь трапеции равна S. Найдите площадь треугольника AKD.

4.33. Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции и касается основания BC. Найдите углы трапеции.

4.34. Окружность, построенная на основании BC трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины диагоналей AC и BD трапеции и касается основания AD. Найдите углы трапеции.

4.35. Диагональ BD трапеции $ABCD$ равна m, а боковая сторона AD равна n. Найдите основание CD, если известно, что основание, диагональ и боковая сторона трапеции, выходящие из вершины C, равны между собой.

4.36*. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдите углы трапеции.

4.37*. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ взяты точки P и Q соответственно, причём $AP:PB=2:3$. Отрезок PQ разбивает трапецию на части, одна из которых по площади втрое больше другой. Найдите отношение $CQ:QD$, если $AD=2BC$.

4.38*. Около окружности описана трапеция $ABCD$, боковая сторона AB перпендикулярна основаниям, M — точка пересечения диагоналей трапеции. Площадь треугольника CMD равна S. Найдите радиус окружности.

Задачи на доказательство и вычисление

4.39. Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ с боковой стороной AB.

а) Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен 2, а точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении $1:4$.

4.40. Через вершину B трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC проведена прямая, параллельная диагонали AC. Пусть эта прямая пересекается с продолжением основания AD в точке E.

а) Докажите, что треугольник DBE равновелик трапеции $ABCD$.

б) Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 10 и 24, а средняя линия равна 13.

4.41. Боковая сторона CD трапеции $ABCD$ равна основанию AD.

а) Докажите, что CA — биссектриса угла BCD.

б) Прямая, проходящая через вершину C перпендикулярно CD, пересекает боковую сторону AB в точке M. Найдите отношение $BM:AM$, если известно, что $AD=CD=2BC$ и $\angle ADC=60^\circ$.

4.42. Прямая, параллельная основаниям BC и AD трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках M и N соответственно, а диагонали AC и BD — в точках K и L соответственно.

а) Докажите, что $MK=NL$.

б) Найдите MN, если известно, что $BC=a$, $AD=b$ и $MK:KL:LN=1:2:1$.

4.43. В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность, CH — высота трапеции.

а) Докажите, что центр окружности, вписанной в трапецию, лежит на отрезке BH.

б) Найдите диагональ AC, если известно, что средняя линия трапеции равна $2\sqrt{7}$, а $\angle AOD=120^\circ$, где O — центр окружности, вписанной в трапецию, а AD — большее основание.

4.44. Точки L и N — середины оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, а точки K и M — середины диагоналей AC и BD соответственно. Известно, что $KM=LN$.

а) Докажите, что сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°.

б) Найдите высоту трапеции, если известно, что площадь четырёхугольника $KLMN$ равна 12, а разность оснований трапеции равна 10.

4.45. Окружность, проходящая через вершины A, B и C трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, вторично пересекает прямую AD в точке M.

а) Докажите, что $AC=BM$.

б) Найдите AC, если известно, что $AD=16$, $CD=8\sqrt{3}$ и $\angle AMB=60^\circ$.

4.46. Дана трапеция, в которую можно вписать окружность и около которой можно описать окружность.

а) Докажите, что проекция диагонали этой трапеции на большее основание равна боковой стороне.

б) Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей, если основания трапеции равны 3 и 27.

4.47. Диагональ BD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и DC.

а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.

б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $BD=5$ и $AC=8$.

4.48. В окружность вписаны две трапеции. Основания и боковые стороны одной из них соответственно параллельны основаниям и боковым сторонам другой.

а) Докажите, что диагонали одной трапеции равны диагоналям другой.

б) Найдите отношение площадей этих трапеций, если известно, что боковая сторона одной из них равна радиусу окружности, а боковая сторона другой в два раза меньше.

4.49. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Точки M и N лежат на сторонах AB и CD соответственно, причём отрезок MN параллелен основаниям трапеции. Диагональ AC пересекает этот отрезок в точке O. Известно, что площади треугольников AMO и CNO равны.

а) Докажите, что $CM \parallel AN$.

б) Найдите MN, если известно, что $AD=a$ и $BC=b$.

4.50. Окружность с центром O_1 вписана в прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A. Окружность с центром O_2 касается большей боковой стороны CD и продолжений оснований трапеции.

а) Докажите, что O_1CO_2D — прямоугольник.

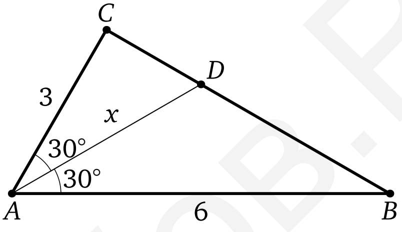
б) Найдите площадь этого прямоугольника, если точка касания M вписанной в трапецию окружности делит меньшее основание на отрезки $BM=6$ и $CM=4$.

§ 5. Как находить высоты и биссектрисы треугольника? Решение задачи 5 из диагностической работы

5. Две стороны треугольника равны 3 и 6, а угол между ними равен 60°. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины этого угла.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Решение. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC, в котором $AB=6$, $AC=3$, $\angle BAC=60^\circ$.



Первый способ. Обозначим $AD=x$. Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

С другой стороны,

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot \sin 30^\circ = \\ = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot x\cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot x\cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4}x.$$

Из уравнения $\frac{9}{4}x=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ находим, что $x=2\sqrt{3}$.

Второй способ. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный. Тогда треугольник ACD также прямоугольный, причём $\angle CAD=30^\circ$. Следовательно,

$$AD = AC : \cos\angle CAD = 3 : \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}. \qquad \triangleleft$$

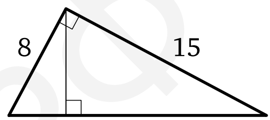
* * *

Высоту прямоугольного треугольника, проведённую из вершины прямого угла, удобно находить так: вычислить двумя способами площадь треугольника — как половину произведения катетов и как половину произведения гипотенузы на искомую высоту. Из полученного равенства выразить эту высоту. Таким образом, высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна произведению катетов, делённому на гипотенузу.

Биссектрису треугольника также можно находить, вычисляя разными способами площадь треугольника.

Пример 1. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 8. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу.

Ответ: $\frac{120}{17}$.



Р е ш е н и е. Гипотенуза треугольника равна

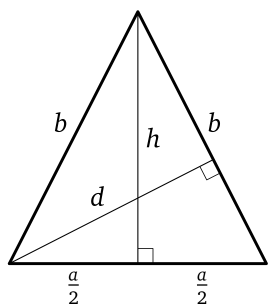
$$\sqrt{15^2+8^2}=17.$$

Следовательно, искомая высота равна $\frac{15\cdot 8}{17}=\frac{120}{17}$. ◁

Высоту равнобедренного треугольника, опущенную на боковую сторону, также удобно вычислять с помощью площадей.

Пример 2. Дан треугольник со сторонами a, b и b. Найдите высоту, опущенную на сторону, равную b.

Ответ: $\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}$.



Р е ш е н и е. Пусть d — искомая высота, h — высота, опущенная на основание данного равнобедренного треугольника. Тогда

$$h=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}.$$

С одной стороны, площадь треугольника равна $\frac{1}{2}ah$, с другой — $\frac{1}{2}bd$. Из равенства $ah=bd$ находим, что

$$d=\frac{ah}{b}=\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2}:b=\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}. \quad ◁$$

* * *

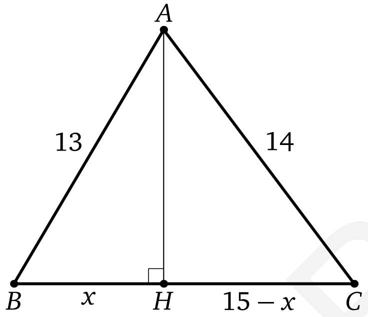
Тот же метод (метод площадей) можно применить и для произвольного треугольника.

Пример 3. Дан треугольник со сторонами 13, 14, 15. Найдите высоту, проведённую к большей стороне.

Ответ: $\frac{56}{5}$.

Р е ш е н и е 1. Пусть AH — указанная высота треугольника ABC со сторонами $BC = 15$, $AC = 14$, $AB = 13$. По формуле Герона

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 7\cdot 3\cdot 4 = 84.$$



С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AH$. Откуда находим, что

$$AH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{2\cdot 84}{15} = \frac{56}{5}. \qquad \lhd$$

Эту задачу можно решить также с помощью теоремы Пифагора.

Р е ш е н и е 2. Поскольку BC — наибольшая сторона треугольника ABC, то точка H лежит на стороне BC. Обозначим $BH = x$. Тогда $CH = BC - BH = 15 - x$. В прямоугольных треугольниках AHB и AHC

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 169 - x^2 \quad \text{и} \quad AH^2 = AC^2 - CH^2 = 196 - (15-x)^2.$$

Из уравнения $169 - x^2 = 196 - (15-x)^2$ находим, что $x = \frac{33}{5}$. Следовательно,

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - \left(\frac{33}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{65^2 - 33^2}{25}} =$$

$$= \sqrt{\frac{32\cdot 98}{25}} = \frac{4\cdot 7\cdot 2}{5} = \frac{56}{5}. \qquad \lhd$$

Можно решить эту задачу, применяя теорему косинусов.

Р е ш е н и е 3. Пусть AH — указанная высота треугольника ABC со сторонами $BC = 15$, $AC = 14$, $AB = 13$. По теореме косинусов

$$\cos\angle ABC = \frac{225 + 169 - 196}{2\cdot 15\cdot 13} = \frac{33}{65},$$

а из прямоугольного треугольника ABH находим, что

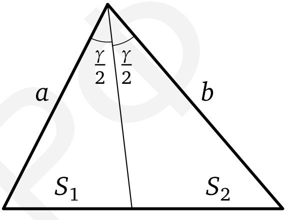
$$AH = AB\sin\angle ABC = 13\sqrt{1 - \left(\frac{33}{65}\right)^2} = \frac{56}{5}. \qquad \lhd$$

Для вычисления биссектрисы также можно использовать метод площадей.

Пример 4. Стороны треугольника равны a и b, а угол между ними равен γ. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины этого угла.

Ответ: $\dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$.

Р е ш е н и е. Пусть S — площадь данного треугольника, S_1 и S_2 — площади треугольников, на которые указанная биссектриса, равная l, разбивает данный треугольник.



Тогда $S=S_1+S_2$, или

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}al\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}bl\sin\frac{\gamma}{2},$$

или $\quad ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(a+b)l\sin\frac{\gamma}{2}.$

Поскольку $\sin\frac{\gamma}{2}$ отличен от нуля, $l=\dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$. ◁

* * *

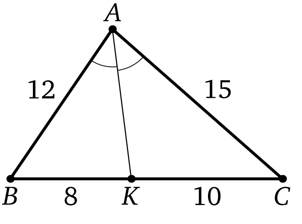
Иногда удобно применить теорему косинусов и свойство биссектрисы треугольника: биссектриса треугольника разбивает его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Пример 5. Вычислите биссектрису треугольника ABC, проведённую из вершины A, если $BC=18$, $AC=15$, $AB=12$.

Ответ: 10.

Р е ш е н и е. Пусть AK — биссектриса треугольника ABC. Тогда

$$\frac{CK}{BK} = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$



Поэтому $BK=\frac{4}{9}BC=\frac{4}{9}\cdot 18=8$.

По теореме косинусов из треугольника ABC находим, что

$$\cos\angle B = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC} = \frac{144+324-225}{2\cdot 12\cdot 18} = \frac{9}{16}.$$

Следовательно,

$$AK^2 = AB^2+BK^2-2AB\cdot BK\cos\angle B = 144+64-108 = 100, \quad AK=10.$$

◁

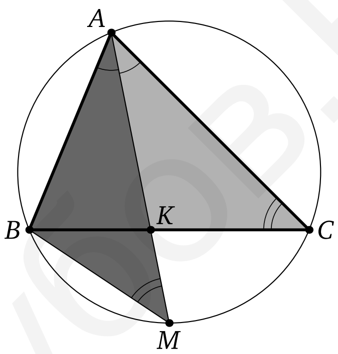
Эту же задачу можно решить, используя формулу для квадрата биссектрисы.

Утверждение. *Квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, её заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.*

Доказательство. Пусть M — точка пересечения продолжения биссектрисы AK треугольника ABC с описанной около этого треугольника окружностью. Тогда треугольник ACK подобен треугольнику AMB по двум углам. Поэтому

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AC}{AM}, \quad \text{или} \quad AK(AK + KM) = AB \cdot AC,$$

$$AK^2 + AK \cdot KM = AB \cdot AC.$$



Следовательно,

$$AK^2 = AB \cdot AC - AK \cdot KM = AB \cdot AC - BK \cdot KC$$

($AK \cdot KM = BK \cdot KC$ по теореме о произведениях отрезков пересекающихся хорд). Что и требовалось доказать. □

Вернёмся к примеру 5. Пусть уже найден отрезок BK. Тогда $CK = BC - BK = 18 - 8 = 10$. По формуле для квадрата биссектрисы треугольника находим, что

$$AK^2 = AB \cdot AC - BK \cdot CK = 12 \cdot 15 - 8 \cdot 10 = 180 - 80 = 100.$$

Следовательно, $AK = 10$.

Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

5.1. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 12 и 20 соответственно. Найдите высоту, проведённую из вершины прямого угла.

5.2. Найдите высоту прямоугольного треугольника, опущенную на гипотенузу, если известно, что основание этой высоты делит гипотенузу на отрезки, равные 1 и 4.

5.3. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на боковую сторону, разбивает её на отрезки, равные 2 и 1, считая от вершины треугольника. Найдите эту высоту.

5.4. Стороны треугольника равны 10, 17 и 21. Найдите высоту треугольника, проведённую из вершины наибольшего угла.

5.5. В треугольнике ABC известно, что $AB=a$, $AC=b$, $\angle BAC=120^\circ$. Найдите биссектрису AM.

5.6. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины прямого угла.

5.7. В треугольнике ABC известно, что $AB=8$, $AC=6$, $\angle BAC=60^\circ$. Найдите биссектрису AM.

5.8. Найдите высоту трапеции, боковые стороны которой равны 6 и 8, а основания равны 4 и 14.

Тренировочные задачи

5.9. Найдите высоты треугольника, если его площадь равна S, а углы равны α, β и γ.

5.10. Расстояния от точки M, лежащей внутри треугольника ABC, до его сторон AC и BC соответственно равны 2 и 4. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если $AB=10$, $BC=17$, $AC=21$.

5.11. К окружности радиуса 7 проведены две касательные из одной точки, удалённой от центра на расстояние, равное 25. Найдите расстояние между точками касания.

5.12. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.

5.13. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите площадь треугольника CKB, если катет BC равен a, а катет AC равен b.

5.14. На высоте CD, опущенной из вершины C прямоугольного треугольника ABC на гипотенузу AB, как на диаметре построена окружность, которая пересекает катет AC в точке E, а катет BC в точке F. Найдите площадь четырёхугольника $CFDE$, если катет AC равен b, а катет BC равен a.

5.15. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины угла при основании.

5.16. В равнобедренном треугольнике BCD с основанием BD проведена биссектриса BE. Известно, что $CE = c$ и $DE = d$. Найдите BE.

5.17. В треугольнике ABC на стороне AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону AB в точке M, а сторону BC — в точке N. Известно, что $AC = 2$, $AB = 3$, $AM : MB = 2 : 3$. Найдите AN.

5.18. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса CD из вершины прямого угла C. Известно, что $AD = m$, $BD = n$. Найдите высоту, опущенную из вершины C.

5.19. В треугольнике ABC угол C равен 60°, а биссектриса CD равна $5\sqrt{3}$. Стороны AC и BC относятся как $5 : 2$. Найдите тангенс угла A и сторону BC.

5.20. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отмечены точки M и N соответственно, причём $BM = BN$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная BC, а через точку N — прямая, перпендикулярная AB. Эти прямые пересекаются в точке O. Продолжение отрезка BO пересекает сторону AC в точке P и делит её на отрезки $AP = 5$ и $PC = 4$. Найдите BP, если известно, что $BC = 6$.

5.21. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E соответственно. Найдите высоту треугольника ABC, опущенную из вершины A, если $AB = 5$, $AC = 2$, а точки A, D, E, C лежат на одной окружности.

5.22. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AE и CD. Найдите длины отрезков CD, CE, DE и расстояние между центрами окружностей, вписанной в треугольник ABC и описанной около треугольника ABC, если $AC = 2$, $BC = 4$, $\angle ACB = \arccos\dfrac{11}{16}$.

5.23. В треугольнике ABC отношение стороны BC к стороне AC равно 3, а $\angle ACB = \alpha$. Из вершины C проведены два луча, делящие угол ACB на три равные части. Найдите отношение отрезков этих лучей, заключённых внутри треугольника ABC.

5.24. Биссектриса CD угла ACB при основании BC равнобедренного треугольника ABC делит сторону AB так, что $AD = BC$. Найдите биссектрису CD и площадь треугольника ABC, если $BC = 2$.

5.25*. В треугольнике KLM проведена биссектриса KP. Окружность, вписанная в треугольник KLP, касается стороны KL в точке Q, причём $LQ = a$. На сторонах KL и LM выбраны точки E и R соответственно так, что прямая ER проходит через центр окружности, вписанной в треугольник KLM. Найдите длину биссектрисы KP, если известно, что $EL + LR = b$, а отношение площадей треугольников KLP и ELR равно α.

Задачи на доказательство и вычисление

5.26. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены медиана CM и высота CH.

а) Докажите, что биссектриса CL треугольника ABC является также биссектрисой треугольника CMH.

б) Найдите CL, если известно, что $CM = 10$, $CH = 6$.

5.27. Дана трапеция $ABCD$. Биссектриса угла BAD пересекает продолжение основания BC в точке K.

а) Докажите, что треугольник ABK равнобедренный.

б) Найдите биссектрису BM треугольника ABK, если известно, что $AD = 10$, $BC = 2$, $AB = CD = 5$.

5.28. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M.

а) Докажите, что треугольники AMB, AMC и BMC равновелики.

б) Известно, что треугольник ABC прямоугольный, а точка M удалена от катетов на расстояния 3 и 4. Найдите расстояние от этой точки до гипотенузы.

5.29. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол $30°$. Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120°$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K. Найдите EK, если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

5.30. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 4$, $BC = 6$ и $AC = 8$.

а) Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности, параллельна стороне BC.

б) Найдите длину биссектрисы треугольника ABC, проведённой из вершины A.

5.31. Высоты, проведённые из вершин A, B и C треугольника ABC, равны 20, 15 и 12 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите длину биссектрисы треугольника, проведённой из вершины C.

5.32. В треугольнике ABC высота CH, биссектриса CL и медиана CM делят угол ACB на четыре равных угла.

а) Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

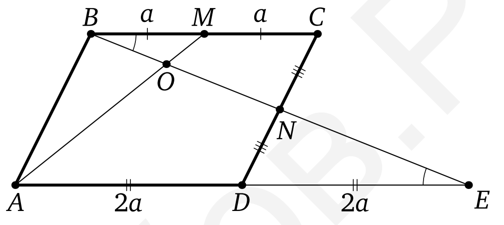
б) Найдите длины высоты CH, биссектрисы CL и медианы CM, если известно, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R.

§ 6. Отношение отрезков. Решение задачи 6 из диагностической работы

6. Точки M и N — середины сторон соответственно BC и CD параллелограмма $ABCD$. Отрезки AM и BN пересекаются в точке O. Найдите отношение $\frac{MO}{OA}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Р е ш е н и е. Пусть продолжения отрезков BN и AD пересекаются в точке E. Обозначим $BM = CM = a$. Тогда $AD = BC = 2a$.



Треугольник DNE равен треугольнику CNB по стороне и прилежащим к ней углам, поэтому $DE = BC = 2a$. Значит,

$$AE = AD + DE = 2a + 2a = 4a.$$

Треугольник BOM подобен треугольнику EOA, следовательно,

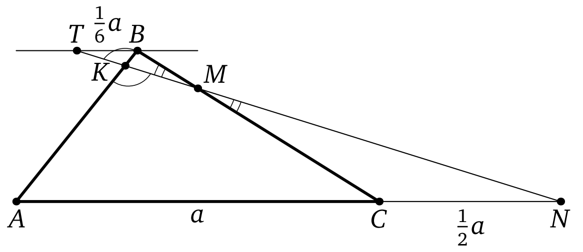
$$\frac{MO}{OA} = \frac{BM}{AE} = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}. \qquad \triangleleft$$

* * *

Большинство задач этого раздела решаются либо с помощью теоремы о пропорциональных отрезках (обобщённой теоремы Фалеса), либо с помощью дополнительного построения, которое приводит к двум парам подобных треугольников. Рассмотрим это построение, решив следующую задачу.

Пример 1. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N, причём $AC = 2CN$. Точка M находится на стороне BC, причём $BM : MC = 1 : 3$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB?

Ответ: $1 : 9$, считая от точки B.



Р е ш е н и е. Через точку B проведём прямую, параллельную AC. Пусть прямая MN пересекает её в точке T, а прямую AB — в точке K.

Обозначим $AC = a$. Тогда $CN = \frac{1}{2}a$, $AN = \frac{3}{2}a$. Из подобия треугольников TBM и NCM (коэффициент подобия равен $\frac{1}{3}$) находим, что

$$TB = \frac{1}{3}CN = \frac{1}{6}a,$$

а из подобия треугольников TBK и NAK —

$$\frac{BK}{AK} = \frac{TB}{AN} = \frac{1}{6}a : \left(\frac{3}{2}a\right) = \frac{1}{9}. \qquad \triangleleft$$

Пример 1 можно легко решить с помощью теоремы Менелая, но эта теорема не входит в обязательную школьную программу. Заметим, что теорему Менелая можно доказать, используя те же рассуждения, что и при решении разобранной выше задачи.

Пример 2. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно, причём $AM : MB = 3 : 5$, $BN : NC = 1 : 4$. Прямые CM и AN пересекаются в точке O. Найдите отношения $OA : ON$ и $OM : OC$.

Ответ: $3 : 4$; $3 : 32$.

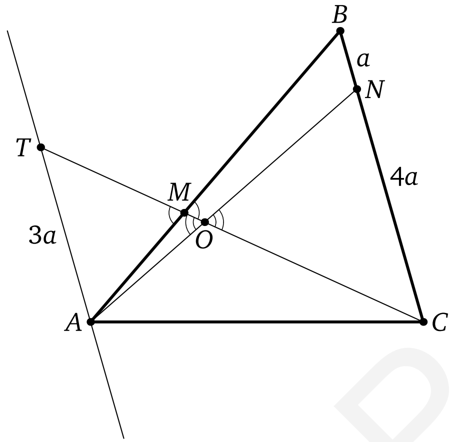
Р е ш е н и е. Через точку A проведём прямую, параллельную BC. Пусть T — точка её пересечения с прямой MC. Положим $BN = a$, $CN = 4a$.

Из подобия треугольников AMT и BMC (коэффициент $\frac{3}{5}$) находим, что

$$AT = \frac{3}{5}BC = \frac{3}{5}(BN + NC) = \frac{3}{5}(a + 4a) = 3a,$$

а из подобия треугольников AOT и NOC получаем

$$\frac{OA}{ON} = \frac{AT}{CN} = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}.$$



Аналогично находим, что $\dfrac{OM}{OC}=\dfrac{3}{32}$. ◁

Иногда при решении задач на отношение отрезков удобно применить метод площадей.

Пример 3. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M, N и K так, что $AM:MB=2:3$, $AK:KC=2:1$, $BN:NC=1:2$. В каком отношении прямая MK делит отрезок AN?

Ответ: $6:7$, считая от точки A.

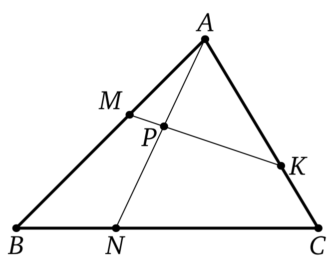
Р е ш е н и е. Пусть P — точка пересечения прямой MK с отрезком AN. Обозначим $\dfrac{AP}{AN}=x$ и $S_{\Delta ABC}=S$. Тогда

$$S_{\Delta ABN}=\frac{BN}{BC}\cdot S=\frac{1}{3}S,\quad S_{\Delta ACN}=\frac{CN}{BC}\cdot S=\frac{2}{3}S,$$

$$S_{\Delta AMP}=\frac{AM}{AB}\cdot\frac{AP}{AN}\cdot S_{\Delta ABN}=\frac{2}{5}\cdot x\cdot\frac{1}{3}\cdot S=\frac{2}{15}xS,$$

$$S_{\Delta AKP}=\frac{AK}{AC}\cdot\frac{AP}{AN}\cdot S_{\Delta ACN}=\frac{2}{3}\cdot x\cdot\frac{2}{3}\cdot S=\frac{4}{9}xS,$$

$$S_{\Delta AMK}=\frac{AM}{AB}\cdot\frac{AK}{AC}\cdot S=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot S=\frac{4}{15}S.$$



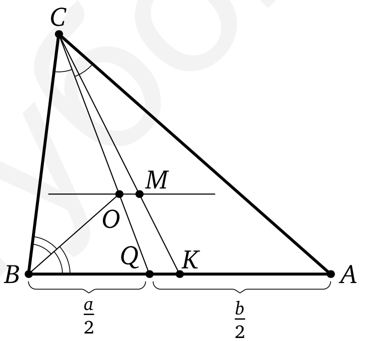
Поскольку $S_{\Delta AMK}=S_{\Delta AMP}+S_{\Delta AKP}$, то

$$\frac{2}{15}xS+\frac{4}{9}xS=\frac{4}{15}S.$$

Отсюда находим, что $x=\frac{6}{13}$. Следовательно, $\frac{AP}{PN}=\frac{6}{7}$. ◁

Пример 4. Длины сторон треугольника различны и образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности, параллельна одной из сторон треугольника.

Доказательство. Если числа образуют арифметическую прогрессию, то одно из них есть среднее арифметическое двух других. Пусть O — центр вписанной окружности (точка пересечения биссектрис) треугольника ABC, в котором $AC=b$, $BC=a$, $AB=\frac{a+b}{2}$. Тогда, поскольку CQ — биссектриса треугольника ABC, получаем $\frac{BQ}{AQ}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}$, значит, $BQ=\frac{a}{2}$ и $AQ=\frac{b}{2}$, а т. к. BO — биссектриса треугольника BCQ, то $\frac{CO}{OQ}=a:\frac{a}{2}=2$.



С другой стороны, если K — середина стороны AB, а M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\frac{CM}{MK}=2$. Поэтому $\frac{CO}{OQ}=\frac{CM}{MK}$, значит, $OM \parallel AB$. Что и требовалось доказать. □

Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

6.1. На медиане AM треугольника ABC взята точка K, причём $AK : KM = 1 : 3$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне AC, делит сторону BC.

6.2. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N, причём $CN = AC$; точка K — середина стороны AB. В каком отношении прямая KN делит сторону BC?

6.3. На стороне BC треугольника ABC и на продолжении стороны AB за вершину B расположены точки M и K соответственно, причём $BM : MC = 4 : 5$ и $BK : AB = 1 : 5$. Прямая KM пересекает сторону AC в точке N. Найдите отношение $CN : AN$.

6.4. На сторонах AB и AC треугольника ABC расположены точки K и L, причём $AK : KB = 4 : 7$ и $AL : LC = 3 : 2$. Прямая KL пересекает продолжение стороны BC в точке M. Найдите отношение $CM : BC$.

6.5. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ расположены точки N и M соответственно, причём $AN : NB = 3 : 2$, $BM : MC = 2 : 5$. Прямые AM и DN пересекаются в точке O. Найдите отношения $OM : OA$ и $ON : OD$.

6.6. На сторонах AB и AC треугольника ABC расположены точки N и M соответственно, причём $AN : NB = 3 : 2$, $AM : MC = 4 : 5$. Прямые BM и CN пересекаются в точке O. Найдите отношения $OM : OB$ и $ON : OC$.

6.7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне BC взята точка D так, что $BD : DC = 1 : 4$. В каком отношении прямая AD делит высоту BE треугольника ABC, считая от вершины B?

6.8. На медиане AA_1 треугольника ABC взята точка M, причём $AM : MA_1 = 1 : 3$. В каком отношении прямая BM делит сторону AC?

6.9. Точки A_1 и C_1 расположены на сторонах BC и AB треугольника ABC. Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке M. В каком отношении прямая BM делит сторону AC, если $AC_1 : C_1B = 2 : 3$ и $BA_1 : A_1C = 1 : 2$?

6.10. В треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. В каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису CD?

Тренировочные задачи

6.11. На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне PR — точка L, причём $NQ = LR$. Точка пересечения отрезков QL и NR делит отрезок QL в отношении $m : n$, считая от точки Q. Найдите отношение $PN : PR$.

6.12. В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении $BD : DC = 2 : 1$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?

6.13. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки K, L и M, причём $AK : KB = 2 : 3$, $BL : LC = 1 : 2$, $CM : MA = 3 : 1$. В каком отношении отрезок KL делит отрезок BM?

6.14. В треугольнике ABC, площадь которого равна 6, на стороне AB взята точка K, делящая эту сторону в отношении $AK : BK = 2 : 3$, а на стороне AC взята точка L, делящая AC в отношении $AL : LC = 5 : 3$. Точка Q пересечения прямых CK и BL отстоит от прямой AB на расстояние 1,5. Найдите сторону AB.

6.15. В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что $AP < AQ$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $PQ = 3$. Найдите AC.

6.16. Дан треугольник ABC. Известно, что $AB = 4$, $AC = 2$ и $BC = 3$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M. Найдите KM.

6.17. Около окружности описана равнобедренная трапеция $ABCD$. Боковые стороны AB и CD касаются окружности в точках M и N, K — середина AD. В каком отношении прямая BK делит отрезок MN?

6.18. Около окружности описана равнобедренная трапеция $ABCD$. Боковая сторона AB касается окружности в точке M, а основание AD — в точке N. Отрезки MN и AC пересекаются в точке P, причём $NP : PM = 2$. Найдите отношение $AD : BC$.

6.19. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ известны отношения $AB : DC = 1 : 2$ и $BD : AC = 2 : 3$. Найдите $DA : BC$.

6.20. В треугольнике ABC проведена высота AD. Прямые, одна из которых содержит медиану BK, а вторая — биссектрису BE, делят эту высоту на три равных отрезка. Известно, что $AB = 4$. Найдите сторону AC.

6.21*. При каком отношении оснований трапеции существует прямая, на которой шесть точек пересечения с диагоналями, боковыми сторонами и продолжениями оснований трапеции высекают пять равных отрезков?

6.22*. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 9$ и $CD = 5$ биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причём точка K лежит на основании AD.

а) В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK — сторону BC?

б) Найдите отношение $MN : KL$, если $LM : KN = 3 : 7$.

6.23*. Из точки A проведены к окружности две касательные (M и N — точки касания) и секущая, пересекающая эту окружность в точках B и C, а хорду MN — в точке P. Известно, что $AB : BC = 2 : 3$. Найдите $AP : PC$.

Задачи на доказательство и вычисление

6.24. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AD, P — точка пересечения отрезка BM с диагональю AC.

а) Докажите, что прямая DP проходит через середину стороны AB.

б) Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BM в точке Q. Найдите отношение $PM:BQ$, если известно, что $AB:AC=1:3$.

6.25. Биссектриса AD треугольника ABC делит его медиану BM пополам.

а) Докажите, что площадь треугольника ACD вдвое больше площади треугольника ABD.

б) В каком отношении медиана BM делит биссектрису AD?

6.26. На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, а на боковых сторонах AB и CD — точки K и L соответственно. При этом $DM:AM=CN:BN=BK:AK=CL:LD=1:2$.

а) Докажите, что четырёхугольник $KMLN$ — трапеция.

б) Известно, что $AD=3BC$. В каком отношении диагональ BD трапеции $ABCD$ делит боковые стороны трапеции $KMLN$?

6.27. На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N, причём M — середина AD, а $BN:NC=1:3$.

а) Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части.

б) Найдите площадь четырёхугольника, образованного пересечениями прямых AN, AC, BD и BC, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 40.

6.28. Через точку пересечения O диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках M и N.

а) Докажите, что O — середина отрезка MN.

б) Найдите основания, если известно, что одно из них втрое больше другого, а $MN=6$.

6.29. Точка пересечения биссектрис углов при большем основании трапеции лежит на меньшем основании.

а) Докажите, что меньшее основание равно сумме боковых сторон.

б) Найдите углы трапеции, если известно, что отношение оснований трапеции равно 3:2, а отношение боковых сторон равно 5:3.

6.30. Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в пять раз больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

6.31. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Биссектриса угла ADC проходит через середину боковой стороны AB.

а) Докажите, что сумма оснований трапеции равна боковой стороне CD.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что $AB=8$, $BC=2$ и $CD=10$.

6.32. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB пополам, а точка E лежит на стороне BC, причём отрезок BE в 3 раза меньше стороны BC. Отрезки AE и CD пересекаются в точке O, $AE=5$, $OC=4$.

а) Докажите, что $CD=AE$.

б) Найдите сторону AB, если известно, что $\angle AOC=120^\circ$.

6.33. На отрезке BD взята точка C. Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD.

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos\angle ABC=\frac{1}{3}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB?

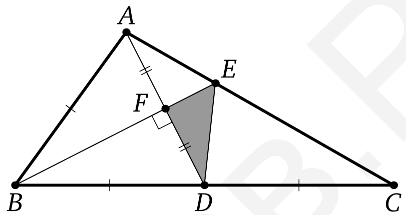
§ 7. Отношение площадей. Решение задачи 7 из диагностической работы

7. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Известно, что площадь треугольника DEF равна 5. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 60.

Р е ш е н и е. Треугольник ABD равнобедренный, так как его биссектриса BF является высотой. Поэтому

$$AF = FD \ \Rightarrow\ S_{\Delta AFE} = S_{\Delta DFE} = 5.$$



Кроме того, $BC = 2BD = 2AB$. Тогда по свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{EC}{AE} = \frac{BC}{AB} = 2.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta DEC} = 2S_{\Delta ADE} = 4S_{\Delta DEF} = 20,\ \ S_{\Delta ADC} = 30.$$

Значит, $S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ADC} = 60$. ◁

* * *

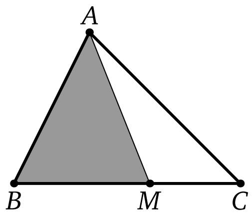
При решении большинства задач этого раздела применяются два простых утверждения:

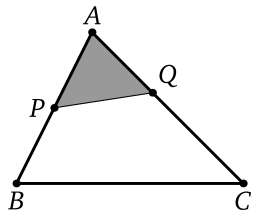
1) если точка M лежит на стороне BC треугольника ABC, то площади треугольников AMB и AMC пропорциональны отрезкам BM и CM, т. е. $\frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta AMC}} = \frac{BM}{CM}$;

2) если прямая пересекает стороны AB и AC треугольника ABC (или их продолжения) в точках P и Q соответственно, то

$$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AQ}{AC}.$$

Первое из этих утверждений вытекает непосредственно из формулы площади треугольника по стороне и опущенной не неё высоте: у треугольников AMB и AMC одна и та же высота, опущенная из общей вершины A.





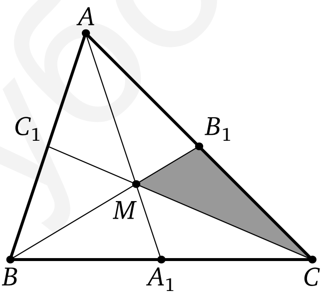
Второе утверждение можно легко вывести из формулы площади треугольника по двум сторонам и углу между ними: у треугольников APQ и ABC углы при общей вершине A либо равны, либо в сумме составляют $180°$.

Напомним также, что отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Пример 1. Докажите, что медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников.

Доказательство. Пусть M — точка пересечения медиан AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC. Тогда

$$S_{\Delta B_1MC} = \frac{1}{3}S_{\Delta B_1BC} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}\right) = \frac{1}{6}\cdot S_{\Delta ABC}.$$



Аналогично для остальных пяти треугольников. Таким образом, площадь каждого из шести треугольников равна шестой части площади исходного треугольника. □

Пример 2. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $OMCD$.

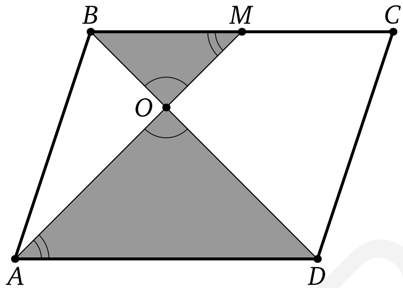
Ответ: $\frac{5}{12}$.

Решение. Из подобия треугольников BOM и DOA находим, что

$$\frac{BO}{OD} = \frac{BM}{AD} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому $\frac{BO}{BD}=\frac{1}{3}$, а так как $\frac{BM}{BC}=\frac{1}{2}$, то

$$S_{\Delta BOM}=\frac{BO}{BD}\cdot\frac{BM}{BC}\cdot S_{\Delta BCD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}.$$



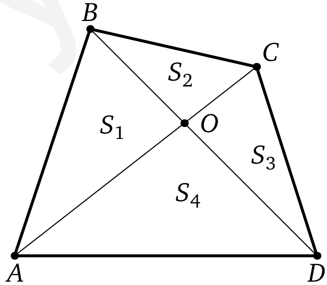
Следовательно,

$$S_{OMCD}=S_{\Delta BCD}-S_{\Delta BOM}=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}. \qquad \triangleleft$$

Пример 3. Диагонали разбивают выпуклый четырёхугольник на треугольники с площадями S_1, S_2, S_3 и S_4 (S_1 и S_3 — площади треугольников, прилежащих к противоположным сторонам четырёхугольни
Докажите, что $S_1S_3=S_2S_4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть диагонали выпуклого четырёхугольни
$ABCD$ пересекаются в точке O,

$$S_{\Delta AOB}=S_1,\quad S_{\Delta BOC}=S_2,\quad S_{\Delta COD}=S_3,\quad S_{\Delta AOD}=S_4.$$



Тогда $\frac{S_1}{S_2}=\frac{AO}{OC}$ и $\frac{S_4}{S_3}=\frac{AO}{OC}$, поэтому $\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_4}{S_3}$. Следовательно, $S_1S_3=$ $=S_2S_4$. $\square$

Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

7.1. Найдите площадь треугольника, вершины которого — середины сторон треугольника площади 4.

7.2. Точки M и N расположены на стороне BC треугольника ABC, а точка K — на стороне AC, причём $BM : MN : NC = 1 : 1 : 2$ и $CK : AK = 1 : 4$. Известно, что площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь четырёхугольника $AMNK$.

7.3. На стороне AB треугольника ABC взяты точки M и N, причём

$$AM : MN : NB = 2 : 2 : 1,$$

а на стороне AC — точка K, причём $AK : KC = 1 : 2$. Найдите площадь треугольника MNK, если площадь треугольника ABC равна 1.

7.4. Через точки M и N, делящие сторону AB треугольника ABC на три равные части, проведены прямые, параллельные стороне BC. Найдите площадь части треугольника, заключённой между этими прямыми, если площадь треугольника ABC равна 1.

7.5. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно, причём

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{2}.$$

Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 1.

7.6. Сторона треугольника равна 36. Прямая, параллельная этой стороне, делит площадь треугольника пополам. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого между сторонами треугольника.

7.7. Из середины основания треугольника площади S проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите площадь полученного таким образом параллелограмма.

Тренировочные задачи

7.8. Из точки на основании треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Они разбивают треугольник на параллелограмм и два треугольника с площадями S_1 и S_2. Найдите площадь параллелограмма.

7.9. В треугольнике ABC проведены биссектрисы CF и AD. Найдите отношение площадей треугольников AFD и ABC, если

$$AB : AC : BC = 21 : 28 : 20.$$

7.10. Треугольник и вписанный в него ромб имеют общий угол. Стороны треугольника, заключающие этот угол, относятся как $m:n$. Найдите отношение площади ромба к площади треугольника.

7.11. Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из боковых сторон на три равные части. Вся трапеция разделена ими на три части. Найдите площадь средней части, если площади крайних равны S_1 и S_2.

7.12. Четырёхугольник разделён диагоналями на четыре треугольника. Площади трёх из них равны 10, 20 и 30, и каждая меньше площади четвёртого треугольника. Найдите площадь данного четырёхугольника.

7.13. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и её основаниями, равны S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

7.14. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P — середина боковой стороны AB. Точка R на стороне CD выбрана так, что $2CD=3RD$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q. Найдите площадь треугольника APQ, если $AD=2BC$.

7.15. Дан выпуклый четырёхугольник площади S. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах сторон данного.

7.16. Дан выпуклый четырёхугольник площади S. Внутри него выбирается точка и отображается симметрично относительно середин его сторон. Получаются четыре вершины нового четырёхугольника. Найдите его площадь.

7.17. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагонали пересекаются в точке M, $BC=b$, $AD=a$. Найдите отношение площади треугольника ABM к площади трапеции $ABCD$.

7.18. В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны BC и AC в два раза больше основания AB. Биссектрисы углов при основании пересекаются в точке M. Какую часть треугольника ABC составляет площадь треугольника AMB?

7.19. В треугольнике ABC, площадь которого равна S, проведены биссектриса CE и медиана BD, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $ADOE$, зная, что $BC=a$, $AC=b$.

7.20. В прямоугольном треугольнике синус меньшего угла равен $\frac{1}{3}$. Перпендикулярно гипотенузе проведена прямая, разбивающая треугольник на две равновеликие части. В каком отношении эта прямая делит гипотенузу?

7.21. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N так, что прямые MC и NC разбивают параллелограмм на три равновеликие части. Найдите MN, если $BD = d$.

7.22. В треугольнике ABC угол A равен 45°, а угол C острый. Из середины стороны BC опущен перпендикуляр NM на сторону AC. Площади треугольников NMC и ABC относятся как $1:8$. Найдите углы треугольника ABC.

7.23. В треугольнике ABC из точки E стороны BC проведена прямая, параллельная высоте BD и пересекающая сторону AC в точке F. Отрезок EF делит треугольник ABC на две равновеликие фигуры. Найдите EF, если $BD = 6$, $\frac{AD}{DC} = \frac{2}{7}$.

7.24. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найдите площадь данного треугольника.

7.25. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AD. Площади треугольников ABD и ADC равны соответственно S_1 и S_2. Найдите AC.

7.26. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь всего четырёхугольника не превосходит 4, $AD = 3$. Найдите сторону BC.

7.27. Из точки P, расположенной внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры на его стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k, b и m, c и n. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

7.28. Из точки P, расположенной внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры на стороны AB, BC и CA. Перпендикуляры соответственно равны l, m, n. Вычислите площадь треугольника ABC, если углы BAC, ABC и ACB соответственно равны α, β и γ.

7.29. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая, проходящая через вершину C, пересекает прямые AB и AD в точках K и L. Площади треугольников KBC и CDL равны p и q. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

7.30. На боковых сторонах AD и BC трапеции $ABCD$ взяты точки P и Q соответственно, причём $AP : PD = 3 : 2$. Отрезок PQ разбивает трапецию на части, одна из которых по площади вдвое больше другой. Найдите отношение $CQ : QB$, если $AB : CD = 3 : 2$.

7.31. На сторонах AB, AC и BC правильного треугольника ABC расположены соответственно точки C_1, B_1 и A_1 так, что треугольник $A_1B_1C_1$ — правильный. Отрезок BB_1 пересекает сторону C_1A_1 в точке O, причём $\frac{BO}{OB_1} = k$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$.

7.32. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, причём $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{2}{1}$. Найдите площадь треугольника, вершины которого — попарные пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1, если площадь треугольника ABC равна 1.

Задачи на доказательство и вычисление

7.33. На каждой стороне равностороннего треугольника взято по точке. Стороны треугольника с вершинами в этих точках соответственно перпендикулярны сторонам исходного треугольника.

а) Докажите, что треугольник с вершинами в указанных точках также равносторонний.

б) Найдите отношение площади этого треугольника к площади исходного.

7.34. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC, если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 2$.

7.35. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок AB в точке D. При этом $\angle ABC = \angle ACD$.

а) Докажите, что прямая CD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.

б) Найдите отношение площадей этих подобных треугольников, если известно, что $AC = 15$, $BC = 20$.

7.36. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки P и Q, причём $BP = PQ = QD$.

а) Докажите, что прямые AP и AQ проходят через середины M и N сторон BC и CD соответственно.

б) Найдите отношение площади пятиугольника $CMPQN$ к площади параллелограмма $ABCD$.

7.37. На сторонах AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки K, L, M и N соответственно, причём $\frac{AK}{KB} = \frac{BL}{LC} = \frac{CM}{MD} = \frac{DN}{NA}$.

а) Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм, а его центр совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.

б) Найдите отношение площадей параллелограммов $KLMN$ и $ABCD$, если известно, что $\frac{AK}{KB} = 2$.

7.38. Вершины ромба расположены (по одной) на сторонах параллелограмма.

а) Докажите, что центры ромба и параллелограмма совпадают.

б) Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если известно, что стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма, а диагонали параллелограмма относятся как 2:3.

7.39. Около окружности описана равнобедренная трапеция.

а) Докажите, что её диагональ проходит через середину отрезка, концы которого — точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции.

б) Найдите отношение оснований трапеции, если известно, что площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет $\frac{3}{8}$ площади трапеции.

7.40. Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $AD > BC$.

а) Докажите, что прямая BO делит площадь трапеции пополам.

б) Пусть M и N — точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции. В каком отношении прямая MN делит площадь трапеции, если $AD = 2BC$?

7.41. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Треугольники AOB и COD равновелики.

а) Докажите, что $BC \parallel AD$.

б) Найдите площади треугольников, на которые диагонали разбивают четырёхугольник $ABCD$, если известно, что его площадь равна 27, $BC = 8$, $AD = 16$.

7.42. Вершины A и D четырёхугольника $ABCD$ соединены с серединой M стороны BC, а вершины B и C — с серединой N стороны AD.

а) Докажите, что если середины отрезков AM, DM, BN, CN не лежат на одной прямой, то четырёхугольник с вершинами в этих серединах — параллелограмм.

б) Найдите площадь этого параллелограмма, если известно, что $AD = 6$, $BC = 8$, а угол между прямыми BC и AD равен 30°.

7.43. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки E и F, на стороне BC — точки K и L, на стороне CD — точки M и N, на стороне AD — точки P и Q. При этом $AE = EF = FB$, $BK = KL = LC$, $CM = MN = ND$ и $DP = PQ = QA$.

а) Докажите, что отрезки KQ и LP делят отрезок FM на три равных отрезка.

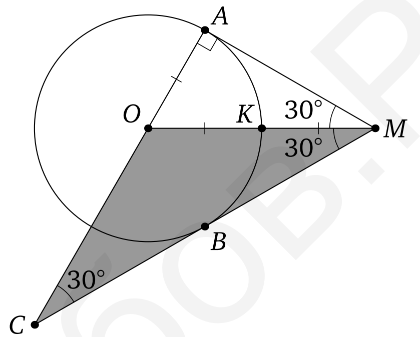
б) Известно, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна 18. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого — точки пересечения прямых EN и FM с KQ и LP.

§ 8. Касательная к окружности. Решение задачи 8 из диагностической работы

8. Из точки M, лежащей вне окружности с центром O и радиусом R, проведены касательные MA и MB (A и B — точки касания). Прямые OA и MB пересекаются в точке C. Найдите OC, если известно, что отрезок OM делится окружностью пополам.

Ответ: $2R$.

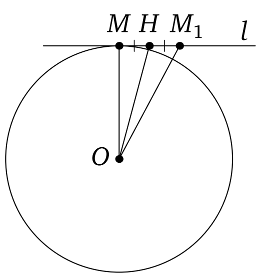
Р е ш е н и е. Пусть K — точка пересечения окружности с отрезком OM. Тогда $OM = 2OK = 2R$.

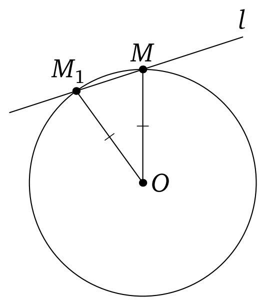


В прямоугольном треугольнике OAM катет OA вдвое меньше гипотенузы OM, значит, $\angle AMO = 30°$, а так как MO — биссектриса угла AMC, то $\angle AMC = 60°$. Из прямоугольного треугольника MAC находим, что $\angle ACM = 30°$, значит, треугольник MOC — равнобедренный. Следовательно, $OC = OM = 2R$. ◁

* * *

В школьных учебниках встречаются два разных определения касательной к окружности. Первое: прямая называется касательной





к окружности, если прямая и окружность имеют единственную общую точку. Второе: прямая называется касательной к окружности, если она проходит через точку, лежащую на окружности, и перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку.

Эти определения равносильны, т. е. если некоторая прямая касается окружности по одному из этих определений, то она касается окружности и по второму. Докажем это.

Утверждение. *Пусть прямая имеет с окружностью единственную общую точку. Тогда прямая перпендикулярна радиусу окружности, проведённому в эту точку.*

Доказательство. Пусть прямая l имеет с окружностью единственную общую точку M. Допустим, что радиус OM окружности, проведённый в эту точку, не перпендикулярен прямой l. Тогда опустим перпендикуляр OH из центра окружности на прямую l и на продолжении отрезка MH за точку H отложим отрезок HM_1, равный MH. Треугольник MOM_1 — равнобедренный, т. к. его высота OH является медианой. Значит, $OM_1 = OM$, т. е. точка M_1, не совпадающая с точкой M, также лежит и на окружности, и на прямой l. А это противоречит тому, что M — единственная общая точка прямой l и окружности. Следовательно, $OM \perp l$. Что и требовалось доказать. □

Утверждение. *Пусть теперь прямая проходит через точку M, лежащую на окружности, и перпендикулярна радиусу OM, проведённому в эту точку. Тогда M — единственная общая точка прямой l и окружности.*

Доказательство. Предположим, что это не так, т. е. что есть ещё хотя бы одна отличная от M общая точка M_1 прямой l и окружности. Тогда $OM_1 = OM$, т. е. треугольник MOM_1 — равнобедренный, что невозможно, поскольку один из углов при его основании равен 90°. Следовательно, M — единственная общая точка прямой l и окружности. Что и требовалось доказать. □

Равносильность определений доказана.

* * *

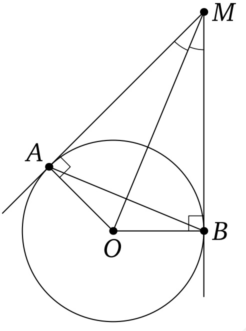
При решении задач, связанных с касательной, чаще всего используются следующие простейшие свойства касательной.

Если из точки M, не лежащей на окружности с центром O, проведены к окружности две касательные MA и MB (A и B — точки касания), то:

1) $MA = MB$;

2) MO — биссектриса угла AMB;

3) прямая MO перпендикулярна отрезку AB и делит его пополам.

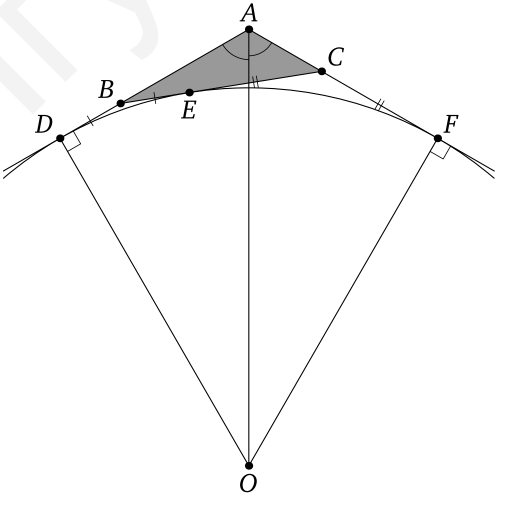


Пример 1. Угол при вершине A треугольника ABC равен $120°$. Окружность радиуса R касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Найдите периметр треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Р е ш е н и е. Пусть O — центр окружности, D, E и F — точки касания с прямыми AB, BC и AC соответственно, $2p$ — периметр треугольника ABC. Тогда $AD = AF$, $BE = BD$ и $CE = CF$. Поэтому

$$2p = AB + BC + AC = AB + (BE + EC) + AC =$$
$$= (AB + BE) + (EC + AC) = (AB + BD) + (CF + AC) = AD + AF = 2AD.$$



Поскольку луч AO — биссектриса угла DAC, то $\angle DAO = 60^\circ$. Из прямоугольного треугольника ADO находим, что $AD = OD\operatorname{ctg}60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{3}$. Следовательно, $2p = 2AD = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. ◁

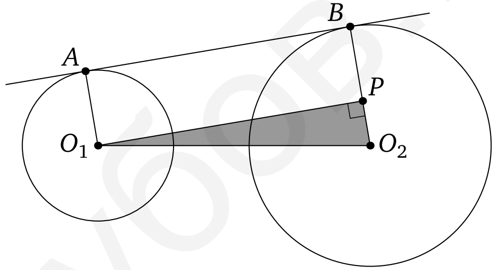
Пример 2. Даны окружности радиусов r и R $(R > r)$. Расстояние между их центрами равно a $(a > R + r)$. Найдите отрезки общих касательных, заключённые между точками касания.

Ответ: $\sqrt{a^2 - (R+r)^2}$, $\sqrt{a^2 - (R-r)^2}$.

Р е ш е н и е. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов r и R, A и B — соответственные точки касания окружностей с общей внешней касательной, C и D — с общей внутренней.

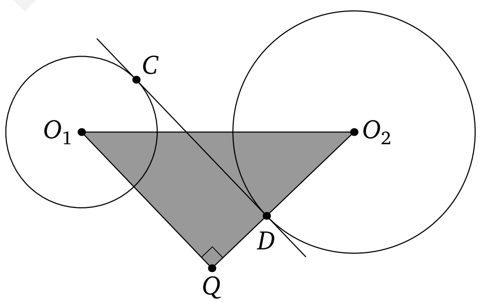
Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из O_1 на O_2B. Из прямоугольного треугольника O_1PO_2 находим, что

$$O_1P = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2P^2} = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}.$$



Пусть Q — основание перпендикуляра, опущенного из O_1 на продолжение O_2D. Из прямоугольного треугольника O_1QO_2 находим, что

$$O_1Q = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2Q^2} = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}.$$



Следовательно,

$$AB = O_1P = \sqrt{a^2 - (R-r)^2},\ CD = O_1Q = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}.$$ ◁

Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

8.1. В окружности проведён диаметр AB. Прямая, проходящая через точку A, пересекает в точке C касательную к окружности, проведённую через точку B. Отрезок AC делится окружностью пополам. Найдите угол BAC.

8.2. Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C. Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.

8.3. В большей из двух концентрических окружностей (имеющих общий центр) проведена хорда, равная 32 и касающаяся меньшей окружности. Найдите радиус каждой из окружностей, если ширина образовавшегося кольца равна 8.

8.4. Две прямые, проходящие через точку M, лежащую вне окружности с центром O, касаются окружности в точках A и B. Отрезок OM делится окружностью пополам. В каком отношении отрезок OM делится прямой AB?

8.5. Из одной точки проведены к окружности две касательные. Длина каждой касательной равна 12, а расстояние между точками касания равно 14,4. Найдите радиус окружности.

8.6. Прямая, проходящая через точку M, удалённую от центра окружности радиуса 10 на расстояние, равное 26, касается окружности в точке A. Найдите AM.

8.7. Окружности радиусов R и r $(R > r)$ касаются некоторой прямой. Линия центров пересекает эту прямую под углом 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей.

8.8. Из точки M проведены касательные MA и MB к окружности (A и B — точки касания). Найдите радиус окружности, если $\angle AMB = \alpha$ и $AB = a$.

8.9. Окружность с центром O касается двух параллельных прямых. Проведена касательная к окружности, пересекающая эти прямые в точках A и B. Найдите угол AOB.

8.10. На окружности радиуса r выбраны три точки таким образом, что окружность оказалась разделённой на три дуги, градусные меры которых относятся как $3:4:5$. В точках деления к окружности проведены касательные. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными.

8.11. Расстояния от концов диаметра окружности до некоторой касательной равны a и b. Найдите радиус окружности.

8.12. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки, равные 5 и 12. Найдите катеты треугольника.

Тренировочные задачи

8.13. Из точки M, лежащей вне окружности радиуса 1, проведены к окружности две взаимно перпендикулярные касательные MA и MB. Между точками касания A и B на меньшей дуге AB взята произвольная точка C, и через неё проведена третья касательная KL, образующая с касательными MA и MB треугольник KLM. Найдите периметр этого треугольника.

8.14. На основании равнобедренного треугольника, равном 8, как на хорде построена окружность, касающаяся боковых сторон треугольника. Найдите радиус окружности, если высота, опущенная на основание треугольника, равна 3.

8.15. Радиусы двух окружностей равны 27 и 13, а расстояние между центрами равно 50. Найдите длины общих касательных к этим окружностям.

8.16. Две окружности радиусов 4 и 3 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются некоторой прямой в точках M_1 и M_2 соответственно и лежат по разные стороны от этой прямой. Отношение отрезков O_1O_2 и M_1M_2 равно $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Найдите O_1O_2.

8.17. Две окружности радиусов 12 и 7 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются некоторой прямой в точках M_1 и M_2 соответственно и лежат по одну сторону от этой прямой. Отношение отрезков M_1M_2 и O_1O_2 равно $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Найдите M_1M_2.

8.18. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 16 и катет BC равен 12. Из центра B радиусом BC описана окружность, и к ней проведена касательная, параллельная гипотенузе. Катет BC продолжен до пересечения с проведённой касательной. Определите, на какое расстояние продолжен катет.

8.19. В прямоугольной трапеции меньшее основание равно высоте, а большее основание равно a. Найдите боковые стороны трапеции, если известно, что одна из них касается окружности, проходящей через концы меньшего основания и касающейся большего основания.

8.20. В треугольнике ABC известно, что $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Найдите радиус окружности, касающейся стороны AC в точке A и касающейся стороны BC.

8.21. Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найдите радиус окружности.

8.22. Найдите длину хорды, если дан радиус r окружности и расстояние a от одного конца хорды до касательной, проведённой через другой её конец.

8.23. Один из смежных углов с вершиной A вдвое больше другого. В эти углы вписаны окружности с центрами O_1 и O_2. Найдите углы треугольника O_1AO_2, если отношение радиусов окружностей равно $\sqrt{3}$.

8.24. В равнобедренной трапеции с острым углом α при основании окружность, построенная на боковой стороне как на диаметре, касается другой боковой стороны. В каком отношении она делит большее основание трапеции?

8.25. В окружности радиуса 4 проведены хорда AB и диаметр AK, образующий с хордой угол $\frac{\pi}{8}$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C. Найдите медиану AM треугольника ABC.

8.26. На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12, взяты точки A и B, причём $OA = 15$, $AB = 5$ и точка A лежит между O и B. Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OB. Найдите площадь треугольника ABC, где C — точка пересечения этих касательных.

8.27. В угол с вершиной A, равный 60°, вписана окружность с центром O. К этой окружности проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках B и C. Отрезок BC пересекается с отрезком AO в точке M. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $AM : MO = 2 : 3$ и $BC = 7$.

8.28. Через точку A окружности радиуса 10 проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и AC. Вычислите радиус окружности, касающейся данной окружности и построенных хорд, если $AB = 16$.

Задачи на доказательство и вычисление

8.29. Общие внутренние касательные к двум окружностям перпендикулярны. Одна из них касается окружностей в точках A и C, вторая — в точках B и D (точки A и B лежат на одной окружности).

а) Докажите, что отрезок AC равен сумме радиусов окружностей.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB=6$, $CD=8$.

8.30. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что в четырёхугольник $BPOQ$ можно вписать окружность.

б) Найдите угол ABC, если известно, что радиус этой окружности вдвое меньше радиуса вписанной окружности треугольника ABC.

8.31. Хорда AB окружности параллельна касательной, проходящей через точку C, лежащую на окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, если известно, что расстояние между касательной и прямой AB равно 1 и $\angle ACB=150°$.

8.32. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность. Прямая l касается этой окружности и параллельна прямой AC. Расстояние от точки B до прямой l равно радиусу окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

б) Найдите расстояние между точками, в которых данная окружность касается сторон AB и BC, если известно, что радиус окружности равен 3.

8.33. Через центр O окружности, вписанной в треугольник ABC, провели прямую MN параллельно стороне AB (M лежит на BC, N лежит на AC).

а) Докажите, что площади треугольников AON и BOM пропорциональны отрезкам AN и BM.

б) Найдите периметр четырёхугольника $ABMN$, если известно, что $AB=5$, $MN=3$.

8.34. Около окружности описана равнобедренная трапеция $ABCD$; E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами AD и BC соответственно.

а) Докажите, что $EK \parallel AB$.

б) Найдите площадь трапеции $ABKE$, если известно, что радиус окружности равен R, а $\angle BAD=60°$.

8.35. Окружность с центром O касается боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC, продолжения боковой стороны AC и продолжения основания BC в точке N. Точка M — середина основания BC.

а) Докажите, что $AN = OM$.

б) Найдите OM, если стороны треугольника ABC равны 10, 10 и 12.

8.36. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке M. Окружность с центром O_1 касается стороны BC в точке N, а также касается продолжений сторон AC и AB.

а) Докажите, что около четырёхугольника $BOCO_1$ можно описать окружность.

б) Найдите площади четырёхугольников $BOCO_1$ и $NOMO_1$, если известно, что $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$.

8.37. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен $AB + AC$.

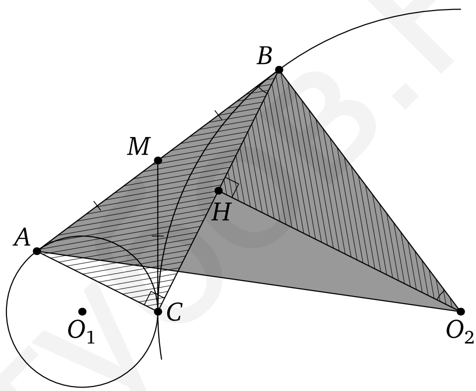
б) Найдите периметр этого треугольника, если известно, что площадь треугольника ABC равна $\sqrt{15}$, $BC = 2$, а отрезок AO в четыре раза больше радиуса вписанной в треугольник ABC окружности.

§ 9. Касающиеся окружности. Решение задачи 9 из диагностической работы

9. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C. Прямая касается этих окружностей в различных точках A и B соответственно. Найдите угол AO_2B, если известно, что $\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{1}{2}$.

Ответ: 45°.

Р е ш е н и е. Пусть M — точка пересечения отрезка AB с общей касательной к данным окружностям, проведённой через их точку касания C. Тогда $MA = MC = MB$, значит, $\angle ACB = 90°$.



Опустим перпендикуляр O_2H из центра O_2 второй окружности на её хорду BC. Тогда H — середина BC. Из условия задачи следует, что $AC = \frac{1}{2}BC = BH$, а т. к. $\angle BO_2H = 90° - \angle O_2BH = \angle ABC$, то прямоугольные треугольники BO_2H и ABC равны по катету и противолежащему острому углу. Значит, $O_2B = AB$. Следовательно, $\angle AO_2B = \angle BAO_2 = 45°$. ◁

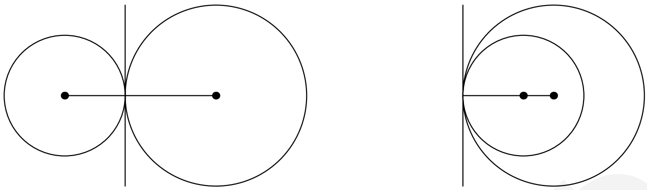
* * *

В разных учебниках приводятся разные формулировки определения касающихся окружностей:

1) говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку;

2) говорят, что две различные окружности касаются, если они имеют общую точку и общую касательную, проведённую в этой точке.

Эти определения равносильны: если окружности касаются по первому определению, то они касаются и по второму, и наоборот.



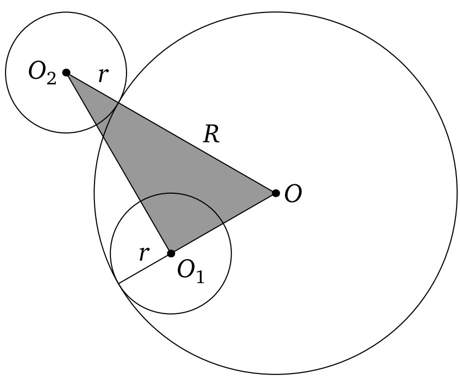
Говорят, что окружности касаются внешним образом (касаются извне), если их центры лежат по разные стороны от общей касательной. Если же центры касающихся окружностей лежат по одну сторону от общей касательной, то говорят, что окружности касаются внутренним образом (касаются изнутри).

Самое важное свойство касающихся окружностей — линия их центров (т. е. прямая, проведённая через центры окружностей) проходит через точку касания. Этот факт при решении задач на касающиеся окружности, как правило, используется в первую очередь.

Если в условии задачи не указано, каким образом касаются окружности, то необходимо рассматривать и случай внешнего, и случай внутреннего касания.

Пример 1. Две окружности радиуса r касаются большей окружности радиуса R — одна изнутри, другая извне, причём градусная мера дуги между точками касания равна 60°. Найдите расстояние между центрами меньших окружностей.

Ответ: $\sqrt{R^2+3r^2}$.



Р е ш е н и е. Пусть окружности радиуса r с центрами O_1 и O_2 касаются окружности радиуса R с центром O соответственно внутренним и внешним образом, причём $r<R$. Поскольку линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания, $OO_1=R-r$ и $OO_2=R+r$. Кроме того, $\angle O_1OO_2=60°$. По теореме косинусов из треугольника O_1OO_2 находим, что

$$O_1O_2^2=(R+r)^2+(R-r)^2-2(R+r)(R-r)\cos 60° = \\ =(R+r)^2+(R-r)^2-(R^2-r^2)=R^2+3r^2.$$

Следовательно, $O_1O_2=\sqrt{R^2+3r^2}$. ◁

Пример 2. Окружности различных радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке K. Прямая касается этих окружностей в различных точках A и B, а вторая прямая — в точках D и C соответственно.

1) Найдите AB и отрезок MN общей касательной окружностей, проходящей через точку их касания, заключённый между общими внешними касательными AB и CD.

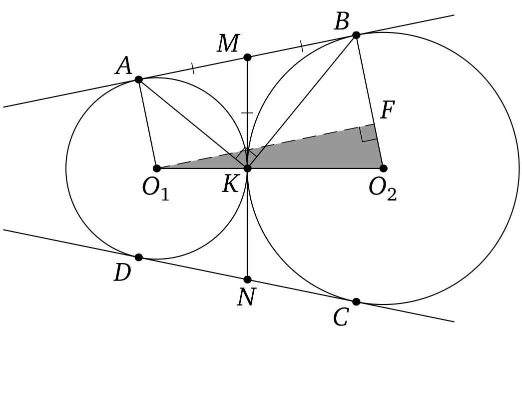
2) Докажите, что $\angle AKB=\angle O_1MO_2=90°$.

3) Докажите, что $ABCD$ — описанная трапеция, и найдите её высоту.

Ответ: 1) $2\sqrt{rR}$; 3) $\dfrac{4rR}{r+R}$.

Р е ш е н и е. Для определённости предположим, что $r<R$.

1) Точка K лежит на отрезке O_1O_2, поскольку окружности касаются внешним образом. Поэтому $O_1O_2=O_1K+KO_2=r+R$. Из точки O_1 опустим перпендикуляр O_1F на радиус O_2B второй окружности. Тогда, так как $O_2B\perp AB$ (как радиус, проведённый в точку касания с прямой AB), $O_1F\parallel AB$. Кроме того, прямые O_1A и O_2B параллельны, так как обе они перпендикулярны касательной AB. Следовательно,



четырёхугольник O_1ABF — прямоугольник. Точка F лежит на отрезке O_2B, поэтому

$$O_2F = O_2B - BF = O_2B - O_1A = R - r.$$

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника O_1FO_2 находим, что

$$O_1F = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2F^2} = \sqrt{(r+R)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{rR}.$$

Следовательно, $AB = O_1F = 2\sqrt{rR}$.

Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны, поэтому $MK = MB$ и $MK = MA$. Значит,

$$NM = 2MK = AB = 2\sqrt{rR}.$$

2) Поскольку MO_1 и MO_2 — биссектрисы смежных углов AMK и BMK, угол O_1MO_2 прямой.

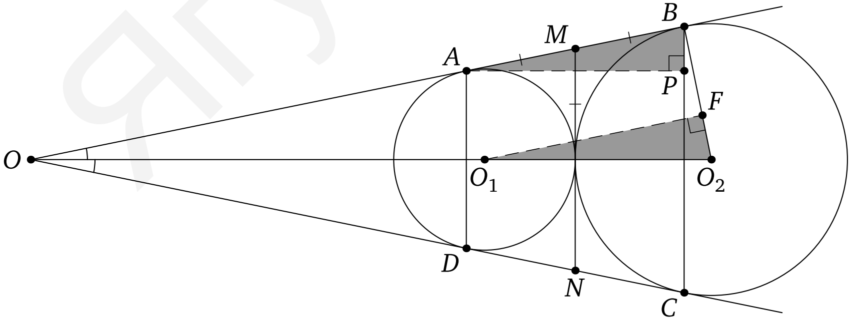
Поскольку $MA = MK = MB$, медиана KM треугольника AKB равна половине стороны AB. Следовательно, $\angle AKB = 90^\circ$.

3) Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке O. Тогда $OA = OD$, $OB = OC$, поэтому $CD = AB = 2\sqrt{rR}$.

Точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисе угла AOD. Биссектриса равнобедренного треугольника AOD является его высотой, поэтому $AD \perp O_1O_2$ и $BC \perp O_1O_2$, значит, $AD \parallel BC$ и $ABCD$ — равнобедренная трапеция. Отрезок MN — её средняя линия, поэтому

$$AD + BC = 2MN = 2AB = AB + CD.$$

Следовательно, в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность.



Пусть AP — высота этой трапеции. Прямоугольные треугольники APB и O_1FO_2 подобны, поэтому $\frac{AP}{O_1F} = \frac{AB}{O_1O_2}$, откуда находим, что

$$AP = \frac{O_1F \cdot AB}{O_1O_2} = \frac{2\sqrt{rR} \cdot 2\sqrt{rR}}{r+R} = \frac{4rR}{r+R}. \qquad \triangleleft$$

Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

9.1. Три равных окружности радиуса R касаются друг друга внешним образом. Найдите стороны и углы треугольника, вершинами которого служат точки касания.

9.2. Две равных окружности касаются изнутри третьей и касаются между собой. Соединив три центра, получим треугольник с периметром, равным 18. Найдите радиус большей окружности.

9.3. Три окружности радиусов 6, 7 и 8 попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах этих окружностей.

9.4. Окружности радиусов 8 и 3 касаются внутренним образом. Из центра большей окружности проведена касательная к меньшей окружности. Найдите расстояние от точки касания до центра большей окружности.

9.5. Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса R в точках A и B соответственно. Найдите радиус r, если $AB=12$, $R=8$.

9.6. Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается изнутри третьей окружности радиуса R в точках A и B соответственно. Найдите радиус R, если $AB=11$, $r=5$.

9.7. Дана окружность радиуса R. Четыре окружности равных радиусов касаются данной внешним образом, и каждая из этих четырёх окружностей касается двух других. Найдите радиусы этих четырёх окружностей.

9.8. Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга внешним образом. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найдите радиус меньшей окружности, если радиусы большей и средней равны 6 и 4.

9.9. На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса R, взята точка A на расстоянии a от центра. Найдите радиус второй окружности, которая касается прямой OA в точке A, а также касается данной окружности.

9.10. Даны окружности радиусов 1 и 3 с общим центром O. Третья окружность касается их обеих. Найдите угол между касательными к третьей окружности, проведёнными из точки O.

9.11. В угол, равный 60°, вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Радиус меньшей окружности равен r. Найдите радиус большей окружности.

9.12. Две окружности касаются друг друга внутренним образом. Известно, что два радиуса большей окружности, угол между которыми равен 60°, касаются меньшей окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

9.13. В равносторонний треугольник вписана окружность. Этой окружности и двух сторон треугольника касается меньшая окружность. Найдите сторону треугольника, если радиус малой окружности равен r.

9.14. В круговой сектор с центральным углом 120° вписана окружность. Найдите её радиус, если радиус данной окружности равен R.

9.15. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Одна прямая касается этих окружностей в различных точках A и B, а вторая — соответственно в различных точках C и D. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку K, пересекается с этими прямыми в точках M и N. Найдите MN, если $AC = a$, $BD = b$.

Тренировочные задачи

9.16. Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A. Общая касательная к обеим окружностям, проведённая через точку A, пересекается с другой их общей касательной в точке B. Найдите радиус второй окружности, если $AB = 4$.

9.17. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке C. Радиусы окружностей равны 2 и 7. Общая касательная к обеим окружностям, проведённая через точку C, пересекается с другой их общей касательной в точке D. Найдите расстояние от центра меньшей окружности до точки D.

9.18. Окружность радиуса r касается некоторой прямой в точке M. На этой прямой по разные стороны от M взяты точки A и B, причём $MA = MB = a$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся данной окружности.

9.19. Одна окружность описана около равностороннего треугольника ABC, а вторая вписана в угол A и касается первой окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

9.20. В окружность вписан равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α. Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся первой окружности и основания треугольника, причём точка касания является серединой основания. Найдите радиус второй окружности.

9.21. Две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами 32, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части. Найдите радиус окружности, которая касается изнутри обеих окружностей и касается отрезка O_1O_2.

9.22. Две окружности радиусов R и r касаются сторон данного угла и друг друга. Найдите радиус третьей окружности, касающейся сторон того же угла, центр которой находится в точке касания окружностей между собой.

9.23. В треугольнике ABC сторона BC равна a, радиус вписанной окружности равен r. Найдите радиусы двух равных окружностей, касающихся друг друга, если одна из них касается сторон BC и BA, а другая — сторон BC и CA.

9.24. Две окружности радиусов 5 и 3 касаются внутренним образом. Хорда большей окружности касается меньшей окружности и делится точкой касания в отношении $3:1$. Найдите длину этой хорды.

9.25. Две окружности, радиусы которых относятся как $9-4\sqrt{3}$ к 1, касаются друг друга внутренним образом. В большей окружности проведены две равные хорды, касающиеся меньшей окружности. Одна из этих хорд перпендикулярна отрезку, соединяющему центры окружностей, а другая нет. Найдите угол между этими хордами.

9.26. Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр большей окружности, пересекает её в точках A и D, а меньшую окружность — в точках B и C. Найдите отношение радиусов окружностей, если $AB:BC:CD=3:7:2$.

9.27. Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает бо́льшую окружность в точках A и D, а меньшую — в точках B и C. Найдите отношение радиусов окружностей, если $AB:BC:CD=2:4:3$.

9.28. Две окружности радиусов R и r ($R>r$) касаются внешне в точке C. К ним проведена общая внешняя касательная AB, где A и B — точки касания. Найдите стороны треугольника ABC.

9.29. Две окружности радиусов R и r ($R>r$) касаются внешним образом. Прямая касается этих окружностей в различных точках A и B. Найдите радиус окружности, касающейся обеих данных окружностей и прямой AB.

9.30. Две окружности касаются внешним образом в точке C. Общая внешняя касательная касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая AC пересекает вторую окружность в точке D, отличной от C. Найдите BC, если $AC = 9$, $CD = 4$.

9.31. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Найдите радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания с одной из общих внешних касательных, равны 6 и 8.

9.32. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

9.33. Две окружности радиусов 5 и 4 касаются внешним образом. Прямая, касающаяся меньшей окружности в точке A, пересекает бóльшую в точках B и C, причём $AB = BC$. Найдите AC.

9.34. Точка B — середина отрезка AC, причём $AC = 6$. Проведены три окружности радиуса 1 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных.

9.35. Точка B — середина отрезка AC, причём $AC = 6$. Проведены три окружности радиуса 5 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных.

9.36. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности, $\angle OAK = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом.

9.37. В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причём $\angle CDA = 120^\circ$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC, если $OC = 2$, $OD = \sqrt{3}$.

9.38. Окружности радиусов r и R касаются друг друга внутренним образом. Найдите сторону равностороннего треугольника, у которого одна вершина находится в точке касания данных окружностей, а две другие лежат на разных данных окружностях.

9.39. Радиусы окружностей S_1 и S_2, касающихся в точке A, равны R и r соответственно ($R > r$). Прямая, проходящая через точку B, лежащую на окружности S_1, касается окружности S_2 в точке C. Найдите BC, если $AB = a$.

9.40. Отношение радиусов окружностей S_1 и S_2, касающихся в точке B, равно k ($k > 1$). Из точки A, лежащей на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке C. Найдите AC, если известно, что хорда, высекаемая окружностью S_2 на прямой AB, равна b.

9.41. Окружность радиуса 1 касается окружности радиуса 3 в точке C. Прямая, проходящая через точку C, пересекает окружность меньшего радиуса в точке A, а большего радиуса — в точке B. Найдите AC, если $AB=2\sqrt{5}$.

9.42. Окружность радиуса 2 касается окружности радиуса 4 в точке B. Прямая, проходящая через точку B, пересекает окружность меньшего радиуса в точке A, а окружность большего радиуса — в точке C. Найдите BC, если $AC=3\sqrt{2}$.

9.43. В угол вписано несколько окружностей, радиусы которых возрастают. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Найдите сумму длин второй и третьей окружностей, если радиус первой равен 1, а площадь круга, ограниченного четвёртой окружностью, равна 64π.

9.44. На отрезке AB, равном $2R$, как на диаметре построена окружность. Вторая окружность того же радиуса, что и первая, имеет центр в точке A. Третья окружность касается первой окружности внутренним образом, второй окружности — внешним образом, а также касается отрезка AB. Найдите радиус третьей окружности.

9.45. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ заключены две окружности одинакового радиуса r, касающиеся друг друга внешним образом. Центр первой окружности находится на отрезке, соединяющем вершину A с серединой F стороны CD, а центр второй окружности находится на отрезке, соединяющем вершину C с серединой E стороны AB. Первая окружность касается сторон AB, AD и CD, а вторая окружность касается сторон AB, BC и CD. Найдите AC.

9.46. В прямоугольном секторе AOB из точки B как из центра проведена дуга OC (C — точка пересечения этой дуги с дугой AB) радиуса BO. Окружность S_1 касается дуги AB, дуги OC и прямой OA, причём точки касания различны, а окружность S_2 касается дуги AB, прямой OA и окружности S_1 (точки касания также попарно различны). Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

9.47*. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB, BC, CA как на диаметрах построены полуокружности S_1, S_2, S_3 по одну сторону от AC. Найдите радиус окружности, касающейся всех трёх полуокружностей, если известно, что её центр удален от прямой AC на расстояние a.

9.48*. Две окружности радиусов r и R ($r < R$) касаются друг друга внешним образом. Прямая касается этих окружностей в точках M и N. В точках A и B окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые AB и MN пересекаются в точке C. Из точки C проведена касательная к третьей окружности (D — точка касания). Найдите CD.

Задачи на доказательство и вычисление

9.49. Окружность с центром O и окружность вдвое меньшего радиуса касаются внутренним образом в точке A. Хорда AB большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M.

а) Докажите, что M — середина AB.

б) Луч OM пересекает большую окружность в точке P. Найдите расстояние от центра этой окружности до хорды AP, если радиус большей окружности равен 13, а $OM = 5$.

9.50. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C. К окружностям проведены общая внешняя касательная и общая внутренняя касательная. Эти касательные пересекаются в точке D.

а) Докажите, что треугольник O_1DO_2 прямоугольный.

б) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $DO_1 = \sqrt{5}$ и $DO_2 = 2\sqrt{5}$.

9.51. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются в точке A внешним образом. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что $O_2C \parallel O_1B$.

б) Найдите площадь треугольника BCO_2, если известно, что радиусы первой и второй окружностей равны 5 и 8 соответственно, а $\angle ABO_1 = 15^\circ$.

9.52. В треугольник ABC помещены две касающиеся окружности с центрами O_1 и O_2, причём первая из них касается сторон AB и AC, а вторая — сторон AB и BC.

а) Докажите, что прямые AO_1 и BO_2 пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник ABC.

б) Найдите радиусы окружностей, если известно, что они равны, а $AB = AC = 10$ и $BC = 12$.

9.53. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом; прямая касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Известно, что точка M пересечения диагоналей четырёхугольника O_1ABO_2 лежит на первой окружности.

а) Докажите, что треугольник MBO_2 равнобедренный.

б) Известно, что точка M лежит на меньшей окружности (с центром O_1). Найдите отношение радиусов окружностей.

9.54. В полуокружности расположены две окружности, касающиеся друг друга, полуокружности и её диаметра.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах окружностей и полуокружности равен диаметру полуокружности.

б) Известно, что радиус полуокружности равен 8, а радиус одной из окружностей равен 4. Найдите радиус другой.

9.55. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что $AD \parallel BC$.

б) Найдите площадь треугольника DKC, если известно, что радиусы окружностей равны 1 и 4.

9.56. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

9.57. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC расположены две окружности, каждая из которых касается другой окружности, двух боковых сторон и одного из оснований.

а) Пусть P и Q — точки касания окружностей с боковой стороной AB, а общая касательная окружностей, проходящая через их точку касания, пересекает боковые стороны в точках M и N. Докажите, что $MN = PQ$.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что $AD = 18$ и $BC = 2$.

9.58. Две окружности касаются внешним образом. Прямая касается первой окружности в точке A, а второй — в точке C; B — точка первой окружности, диаметрально противоположная точке A.

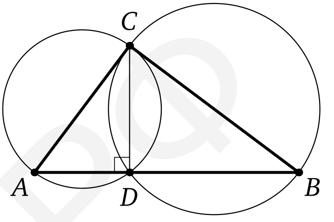
а) Докажите, что точка касания окружностей лежит на отрезке BC.

б) Прямая, проходящая через точку B, касается второй окружности в точке D. Найдите BD, если радиус первой окружности равен r.

§ 10. Пересекающиеся окружности. Решение задачи 10 из диагностической работы

10. На катетах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены окружности. Найдите их общую хорду, если катеты равны 3 и 4.

Ответ: $\frac{12}{5}$.



Р е ш е н и е. Пусть CD — общая хорда окружностей, построенных на катетах $AC=3$ и $BC=4$ прямоугольного треугольника ABC как на диаметрах. Тогда $\angle ADC=\angle BDC=90^\circ$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметр. Значит, точка D лежит на гипотенузе AB, а CD — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла.

По теореме Пифагора $AB=\sqrt{9+16}=5$, а поскольку

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC \quad \text{и} \quad S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD,$$

получаем $\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$, откуда находим, что

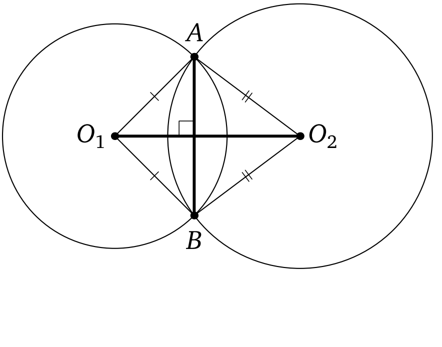
$$CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{3\cdot 4}{5}=\frac{12}{5}. \qquad \triangleleft$$

* * *

Докажем важнейшее свойство пересекающихся окружностей.

Утверждение. *Линия центров пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть AB — общая хорда пересекающихся окружностей с центрами O_1 и O_2. Точки O_1 и O_2 равноудалены от



концов отрезка AB, поэтому O_1O_2 — серединный перпендикуляр к отрезку AB. Что и требовалось доказать. □

Пример 1. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 13 и 15, а общая хорда равна 24. Найдите расстояние между центрами.

Ответ: 14 или 4.

Р е ш е н и е. Пусть окружность радиуса 13 с центром O_1 и окружность радиуса 15 с центром O_2 пересекаются в точках A и B. Тогда $O_1O_2 \perp AB$ и прямая O_1O_2 проходит через середину M отрезка AB.

Из прямоугольных треугольников AMO_1 и AMO_2 по теореме Пифагора находим, что

$$MO_1 = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5, \quad MO_2 = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9.$$

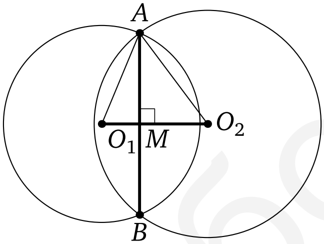


Рис. 1

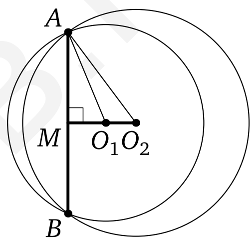


Рис. 2

Если точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 1), то

$$O_1O_2 = MO_1 + MO_2 = 5 + 9 = 14.$$

Если же точки O_1 и O_2 лежат по одну сторону от прямой AB (рис. 2), то

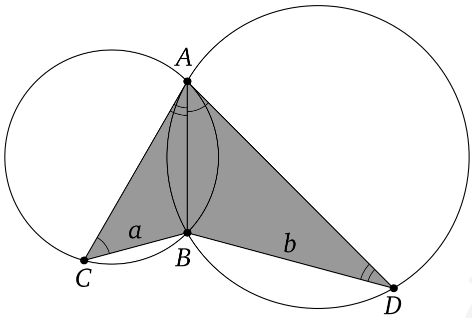
$$O_1O_2 = MO_2 - MO_1 = 9 - 5 = 4. \quad \triangleleft$$

Пример 2. Две окружности пересекаются в точках A и B. В каждой из этих окружностей проведены хорды AC и AD, причём хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB, если $CB = a$, $DB = b$.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

Р е ш е н и е. Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что

$$\angle BAC = \angle BDA, \quad \angle BAD = \angle BCA,$$



поэтому треугольники ABC и DBA подобны по двум углам. Следовательно,

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB},$$

откуда находим, что

$$AB^2 = BC \cdot BD = ab, \quad AB = \sqrt{ab}. \qquad \triangleleft$$

Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

10.1. Прямая, проходящая через общую точку A двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках B и C. Расстояние между проекциями центров окружностей на эту прямую равно 12. Найдите BC, если известно, что точка A лежит на отрезке BC.

10.2. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90^\circ$, $\angle AO_2B = 60^\circ$, $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.

10.3. Отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, делится их общей хордой на отрезки, равные 5 и 2. Найдите общую хорду, если известно, что радиус одной окружности вдвое больше радиуса другой.

10.4. Через вершину A остроугольного треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC, равной a, и пересекающая окружности, построенные на сторонах AB и AC как на диаметрах, в точках M и N, отличных от A. Найдите MN.

10.5. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $BC = a$ и $BD = b$.

10.6. В треугольнике ABC на наибольшей стороне BC, равной b, выбирается точка M. Найдите наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAM и ACM.

Тренировочные задачи

10.7. Две окружности радиусов 3 и 4, расстояние между центрами которых равно 5, пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, причём $CD = 8$ и точка B лежит между точками C и D. Найдите площадь треугольника ACD.

10.8. Дан ромб $ABCD$. Радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD, равны 1 и 2. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

10.9. Две окружности радиусов $\sqrt{5}$ и $\sqrt{2}$ пересекаются в точке A. Расстояние между центрами окружностей равно 3. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружности в точках B и C так, что $AB = AC$ (точка B не совпадает с C). Найдите AB.

10.10. Первая из двух окружностей проходит через центр второй и пересекает её в точках A и B. Касательная к первой окружности, проходящая через точку A, делит вторую окружность на дуги, градусные меры которых относятся как $m:n$ $(m<n)$. В каком отношении вторая окружность делит первую?

10.11. Через общую точку C двух равных окружностей проведены две прямые, пересекающие данные окружности в точках A, B и M, N соответственно. Прямая AB параллельна линии центров, а прямая MN образует угол α с линией центров. Известно, что $AB=a$. Найдите MN.

10.12. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB=a$, $BC=b$ и угол $\angle BAD=\alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

10.13. Две окружности пересекаются в точках A и K. Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK. Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB, касается одной окружности в точке A. Прямая, содержащая отрезок AC, касается другой окружности также в точке A. Длина отрезка BK равна 1, длина отрезка CK равна 4, а тангенс угла CAB равен $\frac{1}{\sqrt{15}}$. Найдите площадь треугольника ABC.

Задачи на доказательство и вычисление

10.14. Окружности, построенные на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, пересекаются в точке D, отличной от A.

а) Докажите, что точка D лежит на прямой BC.

б) Найдите угол BAC, если известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, а точка D лежит на стороне BC, причём $DB:DC = 1:3$.

10.15. Окружность с центром O вписана в угол, равный 60°. Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O.

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен $2\sqrt{15}$.

10.16. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

10.17. Окружности с центрами O_1 и O_2 разных радиусов пересекаются в точках A и B. Хорда AC большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M и делится этой точкой пополам.

а) Докажите, что проекция отрезка O_1O_2 на прямую AC в четыре раза меньше AC.

б) Найдите O_1O_2, если известно, что радиусы окружностей равны 5 и 17, а $AC = 16$.

10.18. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности.

а) Докажите, что их общая хорда перпендикулярна основаниям трапеции.

б) Найдите длину этой хорды, если известно, что основания трапеции равны 1 и 11, а диагонали — 6 и 8.

10.19. Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и N. Лучи O_1M и O_1N вторично пересекают окружность с центром O_2 в точках A и B соответственно, причём M — середина O_1A.

а) Докажите, что точки A, B и O_2 лежат на одной прямой.

б) Окружности пересекают отрезок O_1O_2 в точках C и D. Найдите отношение отрезка CD к радиусу окружностей.

10.20. Отрезок AB — диаметр окружности с центром O. Вторая окружность с центром в точке B пересекается с первой окружностью в точках C и D. Касательная, проведенная в точке C к первой окружности, вторично пересекает вторую окружность в точке P.

а) Докажите, что треугольники AOC и CBP подобны.

б) Найдите AP, если известно, что $BC = 15$ и $PC = 24$.

10.21. Дана трапеция с основаниями AD и BC. Окружности, построенные на боковых сторонах AB и CD как на диаметрах, пересекаются в точках M и N.

а) Докажите, что $MN \perp AD$.

б) Найдите MN, если известно, что боковые стороны трапеции равны 12 и 16, а сумма проекций диагоналей на большее основание равна 20.

10.22. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Около треугольников ACM и BCM описаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно.

а) Докажите, что треугольник O_1MO_2 прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами окружностей, если известно, что $AC = 72$, $BC = 96$.

§ 11. Окружности, связанные с треугольником и четырёхугольником. Решение задачи 11 из диагностической работы

11. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами 13, 13, 24 и расстояние между центрами этих окружностей.

Ответ: 16,9; 2,4; 14,3.

Р е ш е н и е. Пусть CD — высота равнобедренного треугольника ABC со сторонами $AC = BC = 13$ и $AB = 24$, O — центр его описанной окружности радиуса R, Q — центр вписанной окружности радиуса r. Из прямоугольного треугольника ACD находим, что

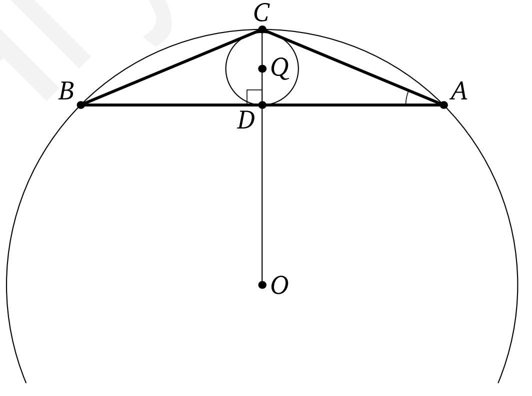
$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5, \quad \sin\angle CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{5}{13}.$$

По теореме синусов

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{13}{2\cdot\frac{5}{13}} = 16{,}9.$$

Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен площади треугольника, делённой на его полупериметр, поэтому

$$r = \frac{S_{\triangle ABC}}{AC + AD} = \frac{AD\cdot CD}{AC + AD} = \frac{12\cdot 5}{13+12} = 2{,}4.$$



Заметим, что угол CAD меньше 45°, так как его тангенс меньше 1 ($\operatorname{tg}\angle CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{5}{12} < 1$), значит, угол BCA тупой, поэтому точки O и Q

лежат по разные стороны от прямой AB. Следовательно,

$$OQ = OC - CQ = OC - (CD - QD) = R - (CD - r) = \\ = 16{,}9 - (5 - 2{,}4) = 14{,}3. \quad \triangleleft$$

* * *

В этом разделе мы рассмотрим методы нахождения радиусов описанной, вписанной и вневписанных окружностей треугольника, а также задачи, связанные с вписанными и описанными четырёхугольниками.

Известно, что около каждого треугольника можно описать окружность, и притом только одну. Центр описанной окружности треугольника — точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы, центр окружности остроугольного треугольника расположен внутри треугольника, центр описанной окружности тупоугольного треугольника — вне треугольника. Во многих случаях радиус R описанной окружности треугольника удобно находить с помощью теоремы синусов: $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, где a — сторона треугольника, а α — угол, противолежащий этой стороне.

Пример 1. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b и b.

Ответ: $\frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Пусть D — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC со сторонами $AB = AC = b$ и $BC = a$. Из прямоугольного треугольника ADB находим, что

$$\cos\angle ABD = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2b}.$$

Тогда

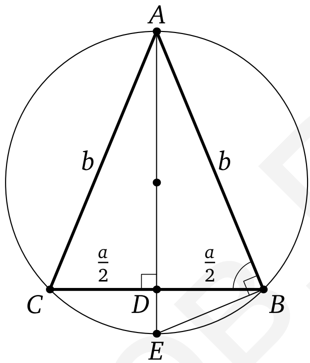
$$\sin\angle ABC = \sin\angle ABD = \sqrt{1 - \cos^2\angle ABD} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4b^2}}.$$

Следовательно, если R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, то

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{b}{2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4b^2}}} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

Второй способ. Продолжим высоту AD до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точке E. Тогда AE — диаметр окружности, $\angle ABE = 90°$, а BD — высота прямоугольного треугольника ABE, проведённая из вершины прямого угла, поэтому $BD^2 = AD \cdot DE$, или

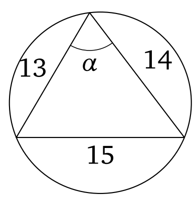
$$\frac{a^2}{4} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}\left(2R - \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}\right).$$



Из этого уравнения находим, что $R = \dfrac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$. ◁

Пример 2. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 13, 14, 15.

Ответ: $\dfrac{65}{8}$.



Р е ш е н и е. Пусть α — угол, противолежащий стороне, равной 15. Тогда из теоремы косинусов получаем

$$\cos\alpha = \frac{169 + 196 - 225}{2 \cdot 13 \cdot 14} = \frac{5}{13}.$$

Следовательно, если R — радиус окружности, описанной около данного треугольника, то

$$R = \frac{15}{2\sin\alpha} = \frac{15}{2\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2}} = \frac{15}{2 \cdot \frac{12}{13}} = \frac{65}{8}. \quad ◁$$

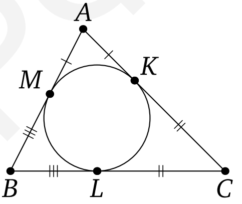
* * *

Известно также, что в любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от сторон треугольника, поэтому она и есть центр вписанной окружности треугольника.

Биссектрисы двух внешних и третьего внутреннего углов треугольника также пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от сторон этих углов, поэтому она — центр окружности, касающейся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, т. е. центр вневписанной окружности треугольника. У каждого треугольника есть три вневписанных окружности.

Докажем два важных факта, связанных с вписанной и вневписанной окружностями треугольника.

Утверждение 1. *Если вписанная окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке M, то $AM = p - a$, где p — полупериметр треугольника ABC, а $a = BC$.*

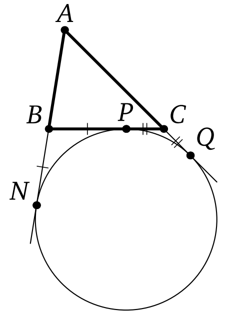


Доказательство. Обозначим $AC = b$, $AB = c$. Пусть K и L — точки касания вписанной окружности со сторонами AC и BC соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} a = BC = BL + LC = BM + CK = \\ = (AB - AM) + (AC - AK) = \\ = (c - AM) + (b - AM) = b + c - 2AM, \end{aligned}$$

откуда $AM = \dfrac{b+c-a}{2} = p - a$. □

Утверждение 2. *Если окружность касается стороны BC треугольника ABC, продолжения стороны AB в точке N и продолжения стороны AC, то $AN = p$, где p — полупериметр треугольника.*



Доказательство. Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Пусть окружность касается стороны BC в точке P, а продолжения стороны AC — в точке Q. Тогда

$$\begin{aligned} 2p = AB + BC + AC = AB + (BP + CP) + AC = \\ = AB + (BN + CQ) + AC = \\ = (AB + BN) + (CQ + AC) = AN + AQ = 2AN, \end{aligned}$$

откуда $AN = p$. □

* * *

При вычислении радиусов вписанной и вневписанной окружностей полезны также следующие формулы для площади треугольника.

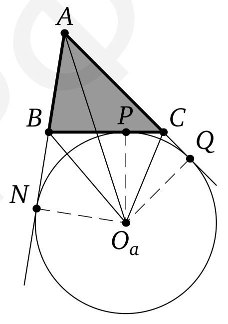
Утверждение. *Если p — полупериметр треугольника, r — радиус его вписанной окружности, а r_a — радиус вневписанной окружности,* *касающейся стороны, равной a, то*

$$S = pr, \tag{1}$$

$$S = (p-a)r_a. \tag{2}$$

Доказательство формулы (1) излагается в учебнике. Докажем формулу (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Пусть O_a — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC, P, N и Q — точки касания этой окружности со стороной BC и продолжениями сторон AB и AC соответственно. Тогда



$$S = S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AO_aB} + S_{\Delta AO_aC} - S_{\Delta BO_aC} =$$
$$= \frac{1}{2}AB\cdot O_aN + \frac{1}{2}AC\cdot O_aQ - \frac{1}{2}BC\cdot O_aP =$$
$$= \frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a - \frac{1}{2}ar_a =$$
$$= \frac{c+b-a}{2}\cdot r_a = (p-a)r_a. \quad \square$$

Рассмотрим на примерах несколько способов нахождения радиусов вписанных и вневписанных окружностей треугольника.

Пример 3. Стороны треугольника равны 10, 10, 12. Найдите радиусы вписанной и вневписанных окружностей.

Ответ: 3; 12; 8; 8.

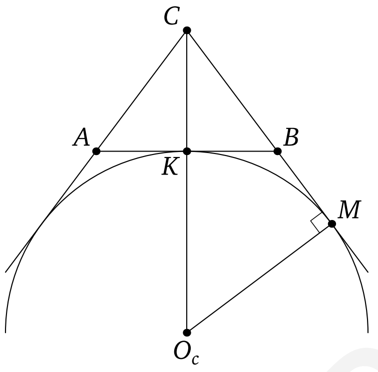
Р е ш е н и е. Пусть r — радиус вписанной окружности треугольника ABC ($AC=BC=10$, $AB=12$), r_c, r_b и r_a — радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон AB, AC и BC соответственно, O_c, O_b и O_a — их центры, S — площадь треугольника ABC, p — его полупериметр.

Первый способ. Воспользуемся известной формулой $S=pr$. Поскольку высота CK треугольника ABC равна 8, то $S=48$. Следовательно,

$$r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3.$$

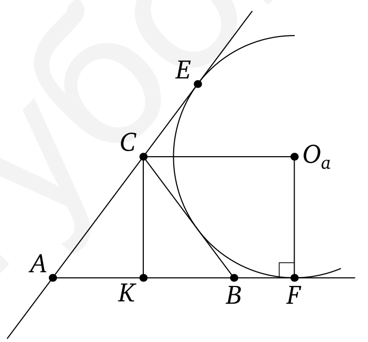
Если окружность с центром O_c касается продолжения стороны BC в точке M, то из подобия треугольников CMO_c и CKB находим, что

$$r_c = O_cM = BK\cdot\frac{CM}{CK} = BK\cdot\frac{BC+BM}{CK} = BK\cdot\frac{BC+BK}{CK} = 6\cdot\frac{16}{8} = 12.$$



Пусть окружность с центром O_a касается продолжения стороны AB в точке F, а продолжения стороны AC — в точке E. Поскольку CO_a — биссектриса угла BCE, а CK — биссектриса его смежного угла ACB, то $\angle O_aCK = 90^\circ$. Поэтому O_aCKF — прямоугольник. Следовательно,

$$r_b = r_a = O_aF = CK = 8.$$



Второй способ (вычисление радиусов вневписанных окружностей). Применим формулу $r_a = \dfrac{S}{p-a}$. В нашем случае

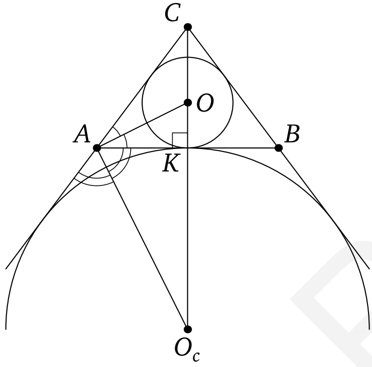
$$r_c = \frac{S}{p-c} = \frac{48}{16-12} = 12, \quad r_b = r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{48}{16-10} = 8.$$

Третий способ (вычисление r и r_c). Поскольку AO — биссектриса треугольника AKC, то

$$\frac{OK}{OC} = \frac{AK}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

а так как $OK = r$, получаем

$$r = OK = \frac{3}{8}CK = \frac{3}{8} \cdot 8 = 3.$$



Поскольку AO_c — биссектриса внешнего угла треугольника AKC, то

$$\frac{O_cK}{O_cC} = \frac{AK}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

а так как $O_cK = r_c$, то

$$r_c = O_cK = \frac{3}{2}CK = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12. \qquad \triangleleft$$

* * *

Напомним некоторые утверждения, относящиеся к вписанных и описанным четырёхугольникам.

Теорема 1. *Для того чтобы около четырёхугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его двух противоположных углов была равна* $180°$.

Теорема 2. *Для того чтобы в выпуклый четырёхугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противоположных сторон были равны.*

Пример 4. Около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $AD = 2$. Найдите AC.

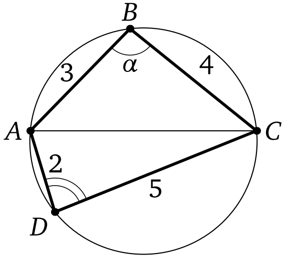
Ответ: $\sqrt{\dfrac{299}{11}}$.

Р е ш е н и е. Обозначим угол $\angle ABC = \alpha$. Тогда

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\alpha = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD\cos(180° - \alpha),$$

или

$$9+16-2\cdot3\cdot4\cos\alpha = 4+25+2\cdot2\cdot5\cos\alpha.$$

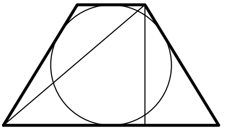


Из этого уравнения находим, что $\cos\alpha = -\frac{1}{11}$. Следовательно,

$$AC^2 = 9+16+2\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{11} = \frac{299}{11}. \qquad \triangleleft$$

Пример 5. Периметр равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равен $2p$. Найдите проекцию диагонали трапеции на большее основание.

Ответ: $\frac{1}{2}p$.



Р е ш е н и е. Проекция диагонали равнобедренной трапеции на большее основание равна полусумме оснований, а т. к. трапеция описанная, то сумма оснований равна сумме боковых сторон. Следовательно, сумма оснований равна полупериметру трапеции, а полусумма оснований — четверти периметра, т. е. $\frac{1}{2}p$. $\triangleleft$

Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

11.1. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2, угол при вершине равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности.

11.2. Под каким углом видна из точек окружности хорда, равная радиусу?

11.3. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ проведена высота CD. Угол BAC равен α. Радиус окружности, проходящей через точки A, C и D, равен R. Найдите площадь треугольника ABC.

11.4. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза равна c. Найдите радиус вписанной окружности.

11.5. Дан треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Найдите радиусы его описанной, вписанной и вневписанных окружностей.

11.6. Дан треугольник со сторонами 13, 13 и 10. Найдите радиусы его описанной, вписанной и вневписанных окружностей.

11.7. Дан треугольник со сторонами 13, 14 и 15. Найдите радиусы его описанной, вписанной и вневписанных окружностей.

11.8. В равнобедренный треугольник с основанием, равным a, вписана окружность, и к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три маленьких треугольника, сумма периметров которых равна b. Найдите боковую сторону данного треугольника.

11.9. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна a, средняя линия трапеции равна b, а острый угол при основании равен 45°. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

11.10. Основания равнобедренной трапеции равны 9 и 21, а высота равна 8. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

Тренировочные задачи

11.11. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 2$ и $AD = 10$ такова, что в неё можно вписать окружность и около неё можно описать окружность. Определите, где находится центр описанной окружности, т. е. расположен он внутри трапеции, или вне её, или же на одной из сторон трапеции $ABCD$. Найдите также отношение радиусов описанной и вписанной окружностей.

11.12. В прямоугольном треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно $\frac{2}{5}$. Найдите острые углы треугольника.

11.13. В прямоугольный треугольник ABC с углом A, равным 30°, вписана окружность радиуса R. Вторая окружность, лежащая вне треугольника, касается стороны BC и продолжений двух других сторон. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

11.14. В треугольнике PQR угол QRP равен 60°. Найдите расстояние между точками касания со стороной QR окружности радиуса 2, вписанной в треугольник, и окружности радиуса 3, касающейся продолжений сторон PQ и PR.

11.15. Равносторонний треугольник ABC со стороной 3 вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причём хорда AD равна $\sqrt{3}$. Найдите хорды BD и CD.

11.16. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, $\angle AOC = 60^\circ$. Найдите угол AMC, где M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

11.17. В треугольнике ABC известно, что $AC = b$, $\angle ABC = \alpha$. Найдите радиус окружности, проходящей через центр вписанного в треугольник ABC круга и вершины A и C.

11.18. В окружности проведены две хорды $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC, не содержащей точки B, вдвое больше длины дуги AB, не содержащей точки C. Найдите радиус окружности.

11.19. Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При этом углы NMP и PMQ равны. Найдите радиус окружности.

11.20. Через вершины A и B треугольника ABC проходит окружность радиуса r, пересекающая сторону BC в точке D. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и C, если $AB = c$ и $AC = b$.

11.21. Центр описанной окружности треугольника симметричен его центру вписанной окружности относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.

11.22. Угол при основании равнобедренного треугольника равен φ. Найдите отношение радиуса вписанной в данный треугольник окружности к радиусу описанной окружности.

11.23. В треугольнике ABC с периметром $2p$ сторона AC равна a, острый угол ABC равен α. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK.

11.24. В треугольнике ABC с периметром $2p$ острый угол BAC равен α. Окружность с центром в точке O касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC в точках K и L соответственно. Точка D лежит внутри отрезка AK, $AD = a$. Найдите площадь треугольника DOK.

11.25. В треугольник вписана окружность радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на части, равные 6 и 8. Найдите две другие стороны треугольника.

11.26. Прямоугольный треугольник ABC разделён высотой CD, проведённой к гипотенузе, на два треугольника: BCD и ACD. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны 4 и 3 соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

11.27. К окружности, вписанной в треугольник со сторонами 6, 10 и 12, проведена касательная, пересекающая две бóльшие стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.

11.28. Окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит одну из сторон на отрезки, равные 3 и 4, а противолежащий этой стороне угол равен 120°. Найдите площадь треугольника.

11.29. Пусть CD — медиана треугольника ABC. Окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются отрезка CD в точках M и N. Найдите MN, если $AC - BC = 2$.

11.30. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка D, причём $BD - AD = 4$. Найдите расстояние между точками, в которых окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются отрезка CD.

11.31. В четырёхугольнике $MNPQ$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон MN, NP, PQ, а другая — сторон MN, MQ, PQ. Точки B и A лежат соответственно на сторонах MN и PQ, причём отрезок AB касается обеих окружностей. Найдите длину стороны MQ, если $NP = b$ и периметр четырёхугольника $BAQM$ больше периметра четырёхугольника $ABNP$ на величину $2p$.

11.32. Около окружности радиуса R описан параллелограмм. Площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна S. Найдите стороны параллелограмма.

11.33. В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AB равна стороне BC, диагональ AC равна стороне CD, а $\angle ACB = \angle ACD$. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACB и ACD, относятся как $3:4$. Найдите отношение площадей этих треугольников.

11.34. Периметр треугольника ABC равен 8. В треугольник вписана окружность, и к ней проведена касательная, параллельная стороне AB. Отрезок этой касательной, заключённый между сторонами AC и CB, равен 1. Найдите сторону AB.

11.35. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\sqrt{3}-1$. Угол BAC равен $60°$, а радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, равен $\sqrt{3}+1$. Найдите углы ABC и ACB.

11.36. В параллелограмме $ABCD$ острый угол BAD равен α. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных около треугольников DAB, DAC, DBC, ABC соответственно. Найдите отношение площади четырёхугольника $O_1O_2O_3O_4$ к площади параллелограмма $ABCD$.

11.37. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E. Известно, что $AB+AD=DE$, $\angle BAD=60°$, $AE=6$. Найдите площадь треугольника ABC.

11.38. В четырёхугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырёхугольника взаимно перпендикулярны. Найдите его площадь, если радиус описанной окружности равен R и $AB=2BC$.

11.39. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр другой окружности, проходящей через вершины A, C и точку пересечения высот треугольника ABC. Найдите AC.

11.40. Под каким углом видна из вершины прямого угла прямоугольного треугольника проекция вписанной окружности на гипотенузу?

Задачи на доказательство и вычисление

11.41. Сторона BC треугольника ABC равна 48. Около треугольника описана окружность радиуса 25. Известно, что радиус OA делит сторону BC на два равных отрезка.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите его боковые стороны.

11.42. Дан треугольник со сторонами 25, 25 и 48.

а) Докажите, что он тупоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей.

11.43. Трапеция с основаниями 1 и 3 такова, что в неё можно вписать окружность и вокруг неё можно описать окружность.

а) Докажите, что центр описанной около трапеции окружности расположен внутри трапеции.

б) Найдите площадь круга, описанного около трапеции.

11.44. В параллелограмме $ABCD$ с углом A, равным 60°, проведена биссектриса угла B, пересекающая сторону CD в точке M.

а) Докажите, что треугольник BCM равносторонний.

б) В треугольник BCM вписана окружность радиуса $\sqrt{7}$. Другая окружность вписана в трапецию $ABMD$. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

11.45. Длины сторон AB, AD, BC и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию.

а) Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

б) Найдите радиус этой окружности, если известно, что $AB=6$, $AD=8$, $BC=10$, $CD=12$ и $BD=BC$.

11.46. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке D, причём $AD=R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F. Найдите площадь треугольника BEF, если известно, что $R=5$ и $CD=15$.

11.47. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB=3$, $BC=CD=5$, $AD=8$ и диагональю $AC=7$.

а) Докажите, что около него можно описать окружность.

б) Найдите диагональ BD.

11.48. Сторона AC треугольника ABC больше стороны AB. Вписанная в треугольник окружность касается стороны BC в точке M, а вневписанная — в точке N.

а) Докажите, что $MN = AC - AB$.

б) Найдите расстояние между центрами указанных окружностей, если сумма их радиусов равна 24, а $MN = 10$.

11.49. Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны.

а) Докажите, что $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

б) Известно, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность. Найдите её радиус, если $BC = 8$, $CD = 12$, $\angle BAD = 150°$.

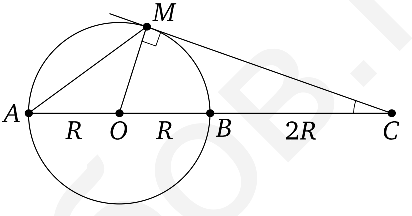
§ 12. Пропорциональные отрезки в окружности. Решение задачи 12 из диагностической работы

12. На продолжении диаметра AB окружности отложен отрезок BC, равный диаметру. Прямая, проходящая через точку C, касается окружности в точке M. Найдите площадь треугольника ACM, если радиус окружности равен R.

Ответ: $\frac{4}{3}R^2\sqrt{2}$.

Р е ш е н и е. Пусть O — центр окружности. Тогда $OM \perp CM$. В прямоугольном треугольнике OMC известно, что $OM = R$ и $OC = OB + BC = R + 2R = 3R$. Тогда

$$CM = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{9R^2 - R^2} = 2R\sqrt{2}, \quad \sin\angle OCM = \frac{OM}{OC} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}.$$



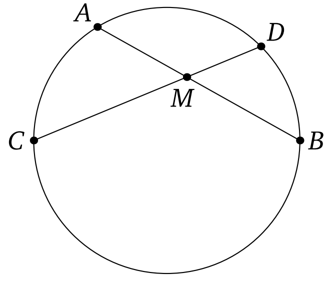
Следовательно,

$$S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2}AC \cdot CM \cdot \sin\angle ACM = \frac{1}{2} \cdot 4R \cdot 2R\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}R^2\sqrt{2}. \qquad \triangleleft$$

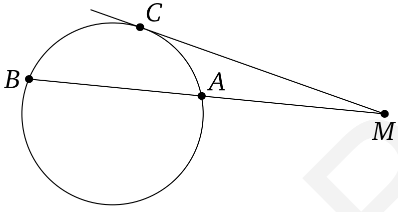
* * *

Этот раздел посвящен теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд окружности, теореме о касательной и секущей, а также важному следствию из этих теорем.

Теорема. *Произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны, т. е. если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.*



Теорема (о касательной и секущей). *Если из точки, лежащей вне окружности, проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной, т. е. если точка M расположена вне окружности, прямая, проходящая через точку M, касается окружности в точке C, а вторая прямая, проходящая через точку M, пересекает окружность в точках A и B, то $MC^2 = MA \cdot MB$.*



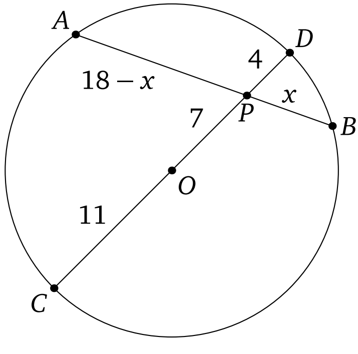
Следствие. Для данной точки M, данной окружности и любой прямой, проходящей через точку M и пересекающей окружность в точках A и B, произведение $MA \cdot MB$ одно и то же.

Пример 1. Расстояние от точки P до центра окружности радиуса 11 равно 7. Через точку P проведена хорда, равная 18. Найдите отрезки, на которые делится хорда точкой P.

Ответ: 12 и 6.

Решение. Пусть O — центр окружности, AB — данная хорда. Проведём диаметр CD, содержащий точку P (P между O и D). Обозначим $PB = x$. Тогда

$$AP = 18 - x, \quad DP = OD - OP = 11 - 7 = 4;$$
$$PC = OP + OC = 7 + 11 = 18.$$

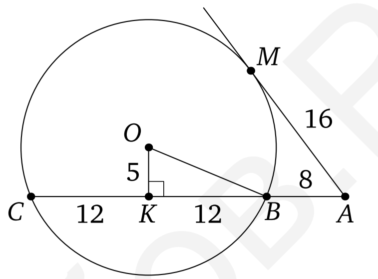


Из теоремы о пересекающихся хордах получаем $AP \cdot PB = PD \cdot PC$, или $(18-x)x = 4 \cdot 18$. Из этого уравнения находим, что $x = 12$ или $x = 6$. ◁

Пример 2. Из точки A, лежащей вне окружности, проведены к окружности касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16, а расстояние от точки A до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32. Найдите радиус окружности, если расстояние от её центра до секущей равно 5.

Ответ: 13.

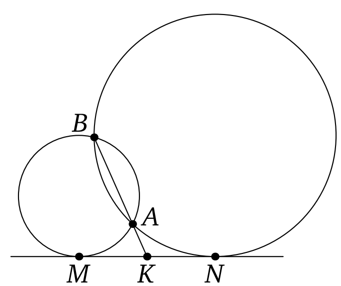
Р е ш е н и е. Пусть секущая пересекает окружность в точках B и C, а M — точка касания. Тогда $AM = 16$, $AC = 32$, $AB + BC = 32$. По теореме о касательной и секущей $AM^2 = AC \cdot AB$, или $16^2 = 32(32 - BC)$. Отсюда находим, что $BC = 24$.



Пусть K — проекция центра O данной окружности на хорду BC. Радиус окружности находим по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OKB: $R = OB = \sqrt{OK^2 + BK^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$. ◁

Пример 3. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A и B — точки пересечения двух окружностей, MN — общая касательная (M и N — точки касания), K — точка пересечения прямых AB и MN (A между K и B).



Тогда $MK^2 = KB \cdot KA$ и $NK^2 = KB \cdot KA$. Следовательно, $MK = NK$. □

Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

12.1. Точка M внутри окружности делит хорду этой окружности на отрезки, равные a и b. Через точку M проведена хорда AB, делящаяся точкой M пополам. Найдите AB.

12.2. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Известно, что $AB=a$, $BK=b$, $AK=c$, $CD=d$. Найдите AC.

12.3. Из точки, расположенной вне окружности на расстоянии $\sqrt{7}$ от центра, проведена секущая, внутренняя часть которой вдвое меньше внешней и равна радиусу окружности. Найдите радиус окружности.

12.4. Через точку M проведены две прямые. Одна из них касается некоторой окружности в точке A, а вторая пересекает эту окружность в точках B и C, причём $BC=7$ и $BM=9$. Найдите AM.

12.5. Из точки A проведены два луча, пересекающие данную окружность: один — в точках B и C, другой — в точках D и E. Известно, что $AB=7$, $BC=7$, $AD=10$. Найдите DE.

12.6. Точка M удалена от центра окружности радиуса R на расстояние d. Прямая, проходящая через точку M, пересекает окружность в точках A и B. Найдите произведение $AM \cdot BM$.

12.7. В квадрат $ABCD$ со стороной a вписана окружность, которая касается стороны CD в точке E. Найдите хорду, соединяющую точки, в которых окружность пересекается с прямой AE.

12.8. В прямоугольном треугольнике ABC угол A прямой, катет AB равен a, радиус вписанной окружности равен r. Вписанная окружность касается катета AC в точке D. Найдите хорду, соединяющую точки пересечения окружности с прямой BD.

12.9. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные a и b. Найдите основание треугольника.

12.10. В окружности с центром O проведены хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M, причём $AM=4$, $MB=1$, $CM=2$. Найдите угол OMC.

Тренировочные задачи

12.11. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, причём AB является диаметром окружности. Диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Известно, что $BC=3$, $CM=\frac{3}{4}$, а площадь треугольника ABC втрое больше площади треугольника ACD. Найдите AM.

12.12. Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность, которая пересекает сторону AB в точке K, а сторону AC — в точке E. Найдите AE, зная, что $AK=KB=a$, $\angle BCK=\alpha$, $\angle CBE=\beta$.

12.13. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину стороны BC и пересекает в точке D продолжение стороны AB за точку A, причём $AD=\frac{2}{3}AB$. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC=1$.

12.14. Каждая из боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC разделена на три равные части, и через четыре точки деления на этих сторонах проведена окружность, высекающая на основании AC хорду DE. Найдите отношение площадей треугольников ABC и BDE, если $AB=BC=3$ и $AC=4$.

12.15. Окружность, диаметр которой равен $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина касательной, проведённой из точки C к окружности, равна 3, $AB=1$. Найдите сторону BC.

12.16. Окружность проходит через соседние вершины M и N прямоугольника $MNPQ$. Длина касательной, проведённой из точки Q к окружности, равна 1, $PQ=2$. Найдите площадь прямоугольника $MNPQ$, если диаметр окружности равен $\sqrt{5}$.

12.17. Точки A, B, C, D — последовательные вершины прямоугольника. Окружность проходит через вершины A и B и касается стороны CD. Через вершину D проведена прямая, которая касается той же окружности в точке E, а затем пересекает продолжение стороны AB в точке K. Найдите площадь трапеции $BCDK$, если известно, что $AB=10$ и $KE:KA=3:2$.

12.18. Найдите радиус окружности, которая высекает на обеих сторонах угла, равного α, хорды, равные a, если известно, что расстояние между ближайшими концами этих хорд равно b.

12.19. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причём остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Касательная CK, проведённая из вершины C к этой же окружности, равна 2. Найдите диаметр окружности.

12.20. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB=3$ и $BC=4$ через середины сторон AB и AC проведена окружность, касающаяся катета BC. Найдите длину отрезка гипотенузы AC, который лежит внутри этой окружности.

12.21. В треугольнике ABC сторона BC равна 4, а медиана, проведённая к этой стороне, равна 3. Найдите длину общей хорды двух окружностей, каждая из которых проходит через точку A и касается BC, причём одна касается BC в точке B, а вторая — в точке C.

12.22. Окружность, проходящая через вершины B, C и D параллелограмма $ABCD$, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найдите AE, если $AD=4$ и $CE=5$.

12.23. Из точки A, находящейся на расстоянии 5 от центра окружности радиуса 3, проведены две секущие AKC и ALB, угол между которыми равен 30° (K, C, L, B — точки пересечения секущих с окружностью). Найдите площадь треугольника AKL, если площадь треугольника ABC равна 10.

12.24. На прямой расположены точки A, B, C и D, следующие друг за другом в указанном порядке. Известно, что $BC=3$, $AB=2CD$. Через точки A и C проведена некоторая окружность, а через точки B и D — другая. Их общая хорда пересекает отрезок BC в точке K. Найдите BK.

12.25. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=AC$) проведены биссектрисы AD, BE, CF. Найдите BC, если известно, что $AC=1$, а вершина A лежит на окружности, проходящей через точки D, E и F.

12.26. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ и проходит через вершину C. Сторону DC она пересекает в точке N. Найдите площадь трапеции $ABND$, если $AB=9$ и $AD=8$.

12.27. На одной из сторон угла, равного α ($\alpha<90^\circ$), с вершиной в точке O взяты точки A и B, причём $OA=a$, $OB=b$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся другой стороны угла.

12.28. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Она пересекает гипотенузу AB в точке E. На стороне BC взята точка G так, что отрезок AG пересекает окружность в точке F, причём отрезки EF и AC параллельны, $BG=2CG$ и $AC=2\sqrt{3}$. Найдите GF.

12.29. В параллелограмме $ABCD$ угол BCD равен 150°, а сторона AD равна 8. Найдите радиус окружности, касающейся прямой CD и проходящей через вершину A, а также пересекающей сторону AD на расстоянии 2 от точки D.

12.30. Окружность и прямая касаются в точке M. Из точек A и B этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные a и b соответственно. Найдите расстояние от точки M до прямой AB.

12.31. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану BM на три равные части. Найдите отношение $BC:CA:AB$.

12.32. Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках C и D соответственно; N — точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найдите:

1) радиус окружности, описанной около треугольника ACD;

2) отношение высот треугольников NAC и NAD, опущенных из вершины N.

12.33*. Равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC ($AD>BC$) описана около окружности, которая касается стороны CD в точке M. Отрезок AM пересекает окружность в точке N. Найдите отношение AD к BC, если $AN:NM=k$.

12.34*. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол A равен $45°$, угол D равен $60°$. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках M и N. Хорда MN пересекает основание AD в точке E. Найдите отношение $AE:ED$.

Задачи на доказательство и вычисление

12.35. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На отрезке CM как на диаметре построена окружность.

а) Докажите, что она проходит через середины катетов.

б) AP и BQ — касательные к этой окружности (P и Q — точки касания). Найдите отношение $AP:BQ$, если известно, что $\operatorname{tg}\angle ABC = 2$.

12.36. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены медианы AM и BN. Известно, что около четырёхугольника $ABMN$ можно описать окружность.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABMN$, если также известно, что $AB = 4\sqrt{5}$.

12.37. Отрезок CD — биссектриса треугольника ABC. Окружность, проходящая через точки C и D, касается стороны AB и пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что $MN \parallel AB$.

б) Найдите MN, если известно, что $AD = 2$, $BD = 4$ и $AM = 1$.

12.38. Из точки A проведены секущая и касательная к окружности радиуса R. Пусть B — точка касания, а D и C — точки пересечения секущей с окружностью, причём точка D лежит между A и C. Известно, что BD — биссектриса угла B треугольника ABC и её длина равна R.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите расстояние от точки A до центра окружности.

12.39. Около треугольника ABC описана окружность. Касательная к окружности, проходящая через точку B, пересекает прямую AC в точке M.

а) Докажите, что треугольники AMB и BMC подобны.

б) Найдите отношение $AM:MC$, если известно, что $AB:BC = 3:2$.

12.40. Окружность, проходящая через вершины A, B и C прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямыми углами при вершинах A и B, пересекает отрезки AD и CD соответственно в точках M и N, причём $AM:AD = CN:CD = 1:3$.

а) Докажите, что $CD = AD$.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен 3.

12.41. Четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями AC и BD вписан в окружность.

а) Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей четырёхугольника перпендикулярно стороне BC, делит пополам сторону AD.

б) Найдите стороны четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AC=84$, $BD=77$, а диаметр окружности равен 85.

12.42. Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 26 и 38 соответственно.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.

б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.

12.43. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ стороны BC и CD равны. Диагонали четырёхугольника пересекаются в точке K.

а) Докажите, что $AC \cdot CK = BC^2$.

б) Найдите площадь этого четырёхугольника, если известно, что $AC=8$ и $\angle BAD=150^\circ$.

12.44. CQ — биссектриса треугольника ABC. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке D.

а) Докажите, что треугольник CDQ равнобедренный.

б) Найдите CD, если известно, что $BQ=a$ и $AQ=b$ $(a>b)$.

§ 13. Углы, связанные с окружностью. Метод вспомогательной окружности. Решение задачи 13 из диагностической работы

13. Окружность S_1 проходит через центр окружности S_2 и пересекает её в точках A и B. Хорда AC окружности S_1 касается окружности S_2 в точке A и делит первую окружность на дуги, градусные меры которых относятся как $5:7$. Найдите градусные меры дуг, на которые окружность S_2 делится окружностью S_1.

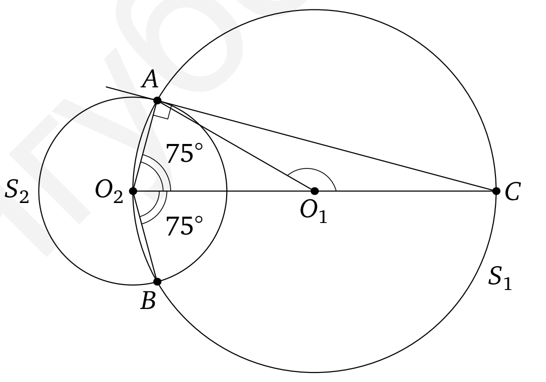
Ответ: $150°$ и $210°$.

Р е ш е н и е. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2 соответственно. Тогда

$$\angle AO_1C = 360° \cdot \frac{5}{5+7} = 150°.$$

Поскольку $\angle O_2AC = 90°$ (радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной), отрезок O_2C — диаметр окружности S_1, поэтому

$$\angle AO_2C = \frac{1}{2}\angle AO_1C = 75°.$$

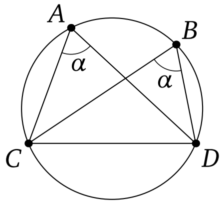


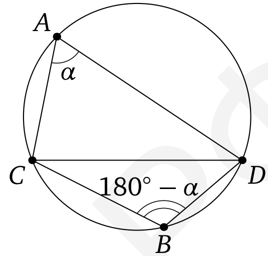
Тогда градусная мера дуги окружности S_2, заключённой между сторонами угла AO_2C, равна $75°$, а градусная мера дуги AB окружности S_2, содержащейся внутри окружности S_1, равна $150°$. Следовательно, дополнительная к ней дуга окружности S_2 равна $360° - 150° = 210°$. ⊲

* * *

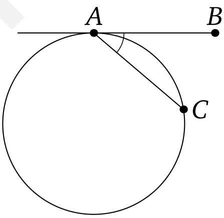
Напомним, что угловая величина дуги — это угловая величина соответствующего этой дуге центрального угла.

Вписанный угол равен половине угловой величины соответствующего центрального угла (дуги). Отсюда следует, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны, т. е. если точки A и B лежат на окружности по одну сторону от прямой, содержащей хорду CD, то $\angle CAD = \angle CBD$. Если же точки A и B лежат по разные стороны от прямой CD, то $\angle CAD + \angle CBD = 180^\circ$.

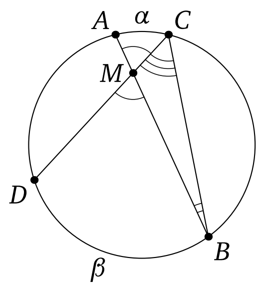




Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними, т. е. если прямая касается окружности в точке A, точка B лежит на этой прямой, а точка C — на окружности, причём все три точки различны, то угловая величина угла BAC равна половине угловой величины дуги AC, заключённой внутри угла BAC.



Пример 1. Докажите, что угол между пересекающимися хордами равен полусумме угловых величин противоположных дуг, высекаемых на окружности этими хордами, т. е. если хорды AB и CD пересекаются в точке M, лежащей внутри окружности, то угловая величина каждого из углов AMC и BMD равна полусумме угловых величин дуг AC и BD, заключённых внутри этих углов.



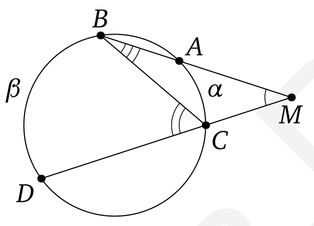
Доказательство. Пусть угловые величины дуг AC и BD, заключённых внутри углов AMC и BMD, равны α и β соответственно. По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle AMC = \angle MBC + \angle MCB = \angle ABC + \angle DCB = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Что и требовалось доказать. □

Пример 2. Докажите, что угол между секущими, проведёнными к окружности из точки, лежащей вне окружности, равен полуразности угловых величин дуг, содержащихся внутри этого угла, т. е. если точка M лежит вне окружности, одна прямая, проходящая через эту точку, пересекает окружность последовательно в точках A и B, а вторая прямая, проходящая через точку M, — в точках C и D, то угловая величина угла BMD равна полуразности угловых величин дуг BD и AC, заключённых внутри этого угла.

Доказательство. Пусть угловые величины дуг AC и BD, заключённых внутри углов AMC и BMD, равны α и β соответственно ($\alpha < \beta$).



По теореме о внешнем угле треугольника

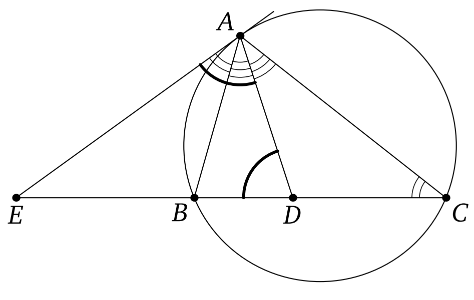
$$\angle BMD = \angle AMC = \angle BCD - \angle MBC = \angle BCD - \angle ABC = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

□

Пример 3. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E; AD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE = ED$.

Доказательство. Пусть точка E лежит на продолжении стороны BC за точку B. Применив теорему об угле между касательной и хордой и теорему о внешнем угле треугольника, получим, что

$$\angle EAD = \angle EAB + \angle BAD = \angle ACB + \angle DAC = \angle EDA.$$



Значит, треугольник ADE является равнобедренным, следовательно, $AE = ED$. □

Пример 4. В круге провели три хорды AB, BC, CD и отметили их середины M, N и K соответственно. Известно, что $\angle BMN = \alpha$. Найдите $\angle NKC$.

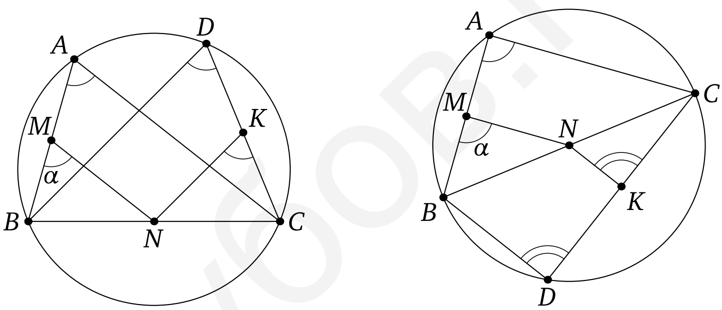
Ответ: α или $180^\circ - \alpha$.

Р е ш е н и е. Пусть точки A и D лежат по одну сторону от прямой BC. Поскольку KN и MN — средние линии треугольников BCD и CBA, то $KN \parallel BD$ и $MN \parallel AC$. Поэтому

$$\angle NKC = \angle BDC = \angle BAC = \angle BMN = \alpha.$$

Пусть точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC. Поскольку KN и MN — средние линии треугольников BCD и CBA, то $KN \parallel BD$ и $MN \parallel AC$. Поэтому

$$\angle BMN = \angle BAC, \quad \angle NKC = \angle BDC.$$



Значит,

$$\angle BMN + \angle NKC = \angle BAC + \angle BDC = 180^\circ.$$

Следовательно,

$$\angle NKC = 180^\circ - \angle BMN = 180^\circ - \alpha. \qquad \triangleleft$$

* * *

Если при размышлении над задачей удаётся заметить, что какие-то четыре точки лежат на одной окружности, то дальнейшие рассуждения сводятся к известным свойствам углов, связанных с окружностью. Этот метод обычно называют методом вспомогательной окружности.

Отметим наиболее известные условия, при которых четыре точки лежат на одной окружности.

1) Можно указать точку, равноудалённую от рассматриваемых точек A, B, C и D.

2) Из точек A и B отрезок CD виден под прямым углом.

3) Из точек A и B, лежащих по одну сторону от прямой CD, отрезок CD виден под одним и тем же углом.

4) Точки A и B лежат по разные стороны от прямой CD, и при этом сумма углов CAD и CBD равна 180°.

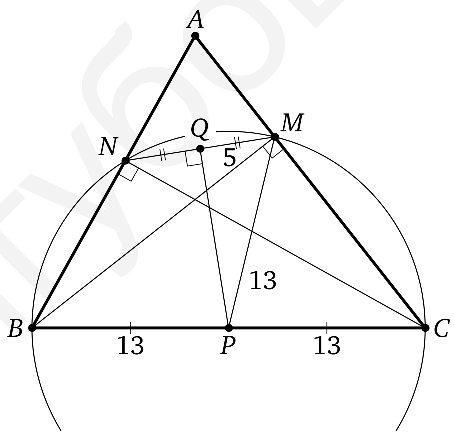
5) Точки A и B лежат на одной стороне неразвёрнутого угла с вершиной O, точки C и D — на другой, и при этом $OA \cdot OB = OC \cdot OD$.

6) Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, и при этом $OA \cdot OB = OC \cdot OD$.

Пример 5. Известно, что BM и CN — высоты треугольника ABC, при этом $MN = 10$ и $BC = 26$. Найдите расстояние между серединами отрезков MN и BC.

Ответ: 12.

Р е ш е н и е. Пусть P и Q — середины отрезков BC и MN соответственно. Из точек M и N отрезок BC виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром BC. Точка P — центр окружности, а Q — середина хорды MN, поэтому $PQ \perp MN$.



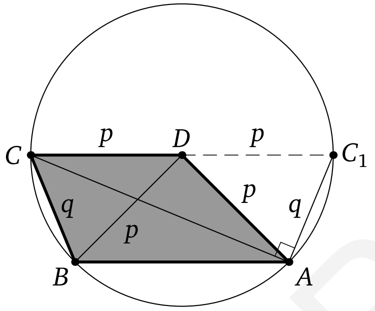
Из прямоугольного треугольника PQM находим, что

$$PQ = \sqrt{PM^2 - QM^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12. \quad \triangleleft$$

Пример 6. Основание CD, диагональ BD и боковая сторона AD трапеции $ABCD$ равны p. Боковая сторона BC равна q. Найдите диагональ AC.

Ответ: $\sqrt{4p^2 - q^2}$.

Р е ш е н и е. Окружность с центром в точке D и радиусом p проходит через точки A, B и C. Если CC_1 — диаметр окружности, то $ABCC_1$ — равнобедренная трапеция, $AC_1 = BC = q$.



Поскольку $\angle CAC_1 = 90^\circ$ (точка A лежит на окружности с диаметром CC_1),

$$AC^2 = CC_1^2 - AC_1^2 = 4p^2 - q^2.$$

Следовательно, $AC = \sqrt{4p^2 - q^2}$. ◁

Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

13.1. Окружность касается сторон угла с вершиной A в точках B и C. Найдите градусные меры дуг, на которые окружность делится точками B и C, если $\angle BAC = 70^\circ$.

13.2. Пусть AB и AC — равные хорды, MAN — касательная, градусная мера дуги BC, не содержащей точки A, равна 200°. Найдите углы MAB и NAC.

13.3. Треугольник ABC равнобедренный. Радиус OA описанного круга образует с основанием AC угол OAC, равный 20°. Найдите угол BAC.

13.4. Окружность описана около равностороннего треугольника ABC. На дуге BC, не содержащей точку A, расположена точка M, делящая градусную меру этой дуги в отношении $1:2$. Найдите углы треугольника AMB.

13.5. Точки A, B, C и D последовательно расположены на окружности. Известно, что градусные меры меньших дуг AB, BC, CD и AD относятся как $1:3:5:6$. Найдите углы четырёхугольника $ABCD$.

13.6. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекая сторону AB в точке E и сторону BC в точке F. Угол AEC в 5 раз больше угла BAF, а угол ABC равен 72°. Найдите радиус окружности, если $AC = 6$.

13.7. Из точки P, расположенной внутри острого угла с вершиной A, опущены перпендикуляры PC и PB на стороны угла. Известно, что $\angle CBP = 25^\circ$. Найдите угол CAP.

13.8. В окружность вписан прямоугольник $ABCD$, сторона AB которого равна a. Из конца K диаметра KP, параллельного стороне AB, сторона BC видна под углом β. Найдите радиус окружности.

13.9. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle BCD = 80^\circ$, $\angle ACB = 50^\circ$ и $\angle ABD = 30^\circ$. Найдите угол ADB.

13.10. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ACB = 25^\circ$, $\angle ACD = 40^\circ$ и $\angle BAD = 115^\circ$. Найдите угол ADB.

13.11. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что

$$\angle ABC = 116^\circ, \quad \angle ADC = 64^\circ, \quad \angle CAB = 35^\circ \quad \text{и} \quad \angle CAD = 52^\circ.$$

Найдите угол между диагоналями, опирающийся на сторону AB.

13.12. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что

$$\angle ABD = \angle ACD = 45^\circ, \quad \angle BAC = 30^\circ, \quad BC = 1.$$

Найдите AD.

13.13. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ известны углы:

$$\angle DAB = \alpha, \quad \angle ABC = \beta, \quad \angle BKC = \gamma,$$

где K — точка пересечения диагоналей. Найдите угол ACD.

Тренировочные задачи

13.14. Около треугольника ABC, в котором $BC=a$, $\angle B=\alpha$, $\angle C=\beta$, описана окружность. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке K. Найдите AK.

13.15. Треугольники ABC и ADC имеют общую сторону AC; стороны AD и BC пересекаются в точке M. Углы B и D равны по 40°. Расстояние между вершинами D и B равно стороне AB, $\angle AMC=70^\circ$. Найдите углы треугольников ABC и ADC.

13.16. Внутри угла с вершиной O взята некоторая точка M. Луч OM образует со сторонами угла углы, один из которого больше другого на 10°; A и B — проекции точки M на стороны угла. Найдите угол между прямыми AB и OM.

13.17. Вершина угла величиной 70° служит началом луча, образующего с его сторонами углы 30° и 40°. Из некоторой точки M на этот луч и на стороны угла опущены перпендикуляры, основания которых — A, B и C. Найдите углы треугольника ABC.

13.18. В остроугольном треугольнике ABC из основания D высоты BD опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC. Известно, что $MN=a$, $BD=b$. Найдите угол ABC.

13.19. Хорда делит окружность на дуги, градусные меры которых относятся как $11:16$. Найдите угол между касательными, проведёнными через концы этой хорды.

13.20. Расстояние между центрами непересекающихся окружностей равно a. Докажите, что точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности, и найдите её радиус.

13.21. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE, пересекающиеся в точке O. Известно, что $OE=1$, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки E, D и O. Найдите стороны и углы треугольника EDO.

13.22. В треугольнике ABC угол B прямой, величина угла A равна $\alpha \neq 45^\circ$, точка D — середина гипотенузы. Точка C_1 симметрична точке C относительно прямой BD. Найдите угол AC_1B.

13.23. На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник. Найдите расстояние между его центром и вершиной C, если $AB = c$ и $\angle C = 120^\circ$.

13.24. В четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D прямые. Диагональ AC образует со стороной AB острый угол 40°, а со стороной AD — угол 30°. Найдите острый угол между диагоналями AC и BD.

13.25. В прямоугольном треугольнике ABC угол при вершине A равен 60°, O — середина гипотенузы AB, P — центр вписанной окружности. Найдите угол POC.

13.26. В параллелограмме $ABCD$ острый угол равен α. Окружность радиуса r проходит через вершины A, B, C и пересекает прямые AD и CD в точках M и N. Найдите площадь треугольника BMN.

13.27. Окружность, проходящая через вершины A, B и C параллелограмма $ABCD$, пересекает прямые AD и CD в точках M и N соответственно. Точка M удалена от вершин B, C и D на расстояния 4, 3 и 2 соответственно. Найдите MN.

13.28. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к BC, пересекает сторону AD в точке M. Докажите, что EM — медиана треугольника AED, и найдите её длину, если $AB = 7$, $CE = 3$, $\angle ADB = \alpha$.

13.29. Дан треугольник ABC. Из вершины A проведена медиана AM, а из вершины B — медиана BP. Известно, что угол APB равен углу BMA. Косинус угла ACB равен 0,8 и $BP = 1$. Найдите площадь треугольника ABC.

13.30. В треугольнике ABC угол ABC равен α, угол BCA равен 2α. Окружность, проходящая через точки A, C и центр описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AB в точке M. Найдите отношение AM к AB.

13.31. Точка E лежит на продолжении стороны AC равностороннего треугольника ABC за точку C. Точка K — середина отрезка CE. Прямая, проходящая через точку A перпендикулярно AB, и прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, пересекаются в точке D. Найдите углы треугольника BKD.

13.32. Вне правильного треугольника ABC, но внутри угла BAC взята точка M так, что угол CMA равен 30° и угол BMA равен α. Найдите угол ABM.

13.33. В трапеции $MNPQ$ ($MQ \parallel NP$) угол NQM в два раза меньше угла MPN. Известно, что

$$NP = MP = \frac{13}{2}, \quad MQ = 12.$$

Найдите площадь трапеции.

13.34. Дан угол, равный α. На его биссектрисе взята точка K; P и M — проекции K на стороны угла. На отрезке PM взята точка A, причём $KA = a$. Прямая, проходящая через A перпендикулярно KA, пересекает стороны угла в точках B и C. Найдите площадь треугольника BKC.

13.35. На биссектрисе угла с вершиной L взята точка A. Точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на стороны угла. На отрезке KM взята точка P ($KP < PM$), и через неё перпендикулярно отрезку AP проведена прямая, пересекающая прямую KL в точке Q (K между Q и L), а прямую ML — в точке S. Известно, что $\angle KLM = \alpha$, $KM = a$, $QS = b$. Найдите QK.

13.36. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$, а расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, равно $\sqrt{2}$. Найдите BC.

13.37*. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB, пересекает прямую AC в точке M, а перпендикуляр, проходящий через середину стороны AC, пересекает прямую AB в точке N. Известно, что $MN = BC$ и прямая MN перпендикулярна прямой BC. Найдите углы треугольника ABC.

13.38*. В равносторонний треугольник ABC вписана полуокружность с центром O на стороне AB. Некоторая касательная к полуокружности пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно, а прямая, проходящая через точки касания сторон BC и AC с полуокружностью, пересекает отрезки OM и ON соответственно в точках P и Q. Найдите PQ, если $MN = 2$.

Задачи на доказательство и вычисление

13.39. В окружность вписан четырёхугольник с тремя равными сторонами.

а) Докажите, что в этом четырёхугольнике есть параллельные стороны.

б) Найдите диагонали четырёхугольника, если известно, что радиус окружности равен 25, а каждая из трёх равных сторон четырёхугольника равна 30.

13.40. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что

$$\cos\angle ABC = -\cos\angle ADC.$$

а) Докажите, что $\angle ABD = \angle ACD$.

б) Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника, если известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $BC = 6$, а высоты треугольников ABD и CBD, проведённые из вершины B, равны.

13.41. Диагонали трапеции перпендикулярны боковым сторонам.

а) Докажите, что трапеция равнобедренная.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что её основания равны 10 и 26.

13.42. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая CD касается окружности, описанной около треугольника ABD.

а) Докажите, что диагональ BD равна одной из сторон параллелограмма.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что $BD = 2$ и $\angle BCD = 45^\circ$.

13.43. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB. Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E.

а) Докажите, что четырёхугольник $ACED$ вписанный.

б) Найдите AE, если известно, что $AB = 10$, $AC = 16$, $AD = 15$.

13.44. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB.

а) Докажите, что $\angle BPQ = \angle BAC$.

б) Известно, что площадь треугольника ABC равна 96, площадь четырёхугольника $AQPC$ равна 72, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\frac{16}{\sqrt{3}}$. Найдите PQ.

13.45. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 60°$, $\angle ABC = 45°$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M, N, P.

а) Докажите, что треугольник MNP прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника MNP, если известно, что $BC = 12$.

13.46. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах.

а) Докажите, что центр квадрата лежит на биссектрисе прямого угла треугольника.

б) Радиус окружности, описанной около треугольника, относится к стороне квадрата как 13:6. Найдите углы треугольника.

13.47. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках M и N соответственно, AH — высота треугольника. Прямые MN и BC пересекаются в точке K.

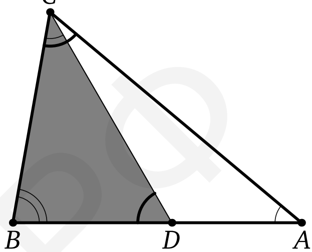
а) Докажите, что $\angle MKB = \angle OAH$.

б) Найдите AK, если известно, что $\angle ABC = 77°$, $\angle ACB = 17°$, а отрезок, соединяющий точку H с серединой MN, равен 8.

§ 14. Вспомогательные подобные треугольники. Решение задачи 14 из диагностической работы

14. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D, причём $\angle BCD = \angle BAC$. Известно, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Найдите CD.

Ответ: $\frac{ab}{c}$.



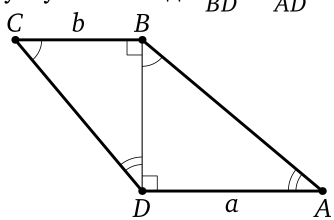
Р е ш е н и е. Треугольники CBD и ABC подобны по двум углам, т. к. $\angle BCD = \angle BAC$ по условию, а угол при вершине B — общий. Значит, соответствующие стороны этих треугольников пропорциональны, т. е. $\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB}$. Следовательно, $CD = \frac{BC \cdot AC}{AB} = \frac{ab}{c}$. ◁

В некоторых, часто непростых, задачах ключевая идея состоит в отыскании пары подобных треугольников. Как правило, в одном из треугольников этой пары либо есть два известных отрезка, либо их легко найти, а в другом — один известный отрезок. Из соответствующей пропорции находят нужный отрезок.

Пример 1. В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD перпендикулярна основаниям AD и BC, а сумма острых углов при вершинах A и C равна $90°$. Основания $AD = a$, $BC = b$. Найдите боковые стороны трапеции.

Ответ: $\sqrt{a(a+b)}$, $\sqrt{b(a+b)}$.

Р е ш е н и е. Каждый из углов BCD и ABD в сумме с углом A составляет $90°$, поэтому $\angle BCD = \angle ABD$, значит, треугольники ABD и DCB подобны по двум углам. Тогда $\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{AD}$.



Отсюда находим, что $BD = \sqrt{BC \cdot AD} = \sqrt{ab}$. Следовательно,

$$CD = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{b^2 + ab} = \sqrt{b(a+b)},$$

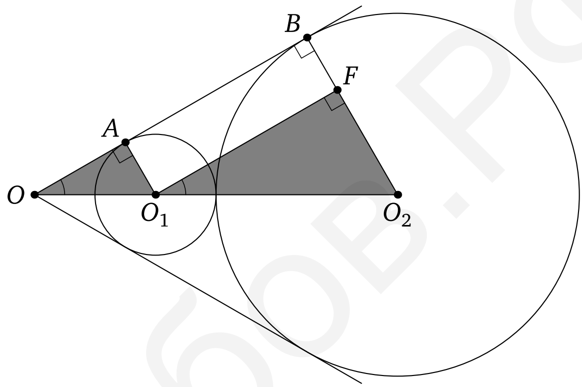
$$AB = \sqrt{BD^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + ab} = \sqrt{a(a+b)}.$$ ◁

Пример 2. К окружностям радиусов r и R $(r < R)$, касающимся внешним образом, проведены общие внешние касательные. Одна из них касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Касательные пересекаются в точке O. Найдите OA.

Ответ: $OA = \dfrac{2r\sqrt{rR}}{R-r}$.

Р е ш е н и е. Из центра O_1 первой окружности опустим перпендикуляр O_1F на радиус O_2B второй окружности. Тогда

$$O_1F = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2F^2} = \sqrt{(r+R)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{rR}.$$

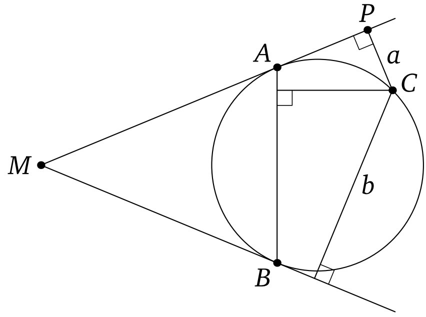


Прямоугольные треугольники OAO_1 и O_1FO_2 подобны, поэтому

$$\frac{O_1A}{OA} = \frac{O_2F}{O_1F}, \quad \text{или} \quad \frac{r}{OA} = \frac{R-r}{2\sqrt{rR}}.$$

Следовательно, $OA = \dfrac{2r\sqrt{rR}}{R-r}$. ◁

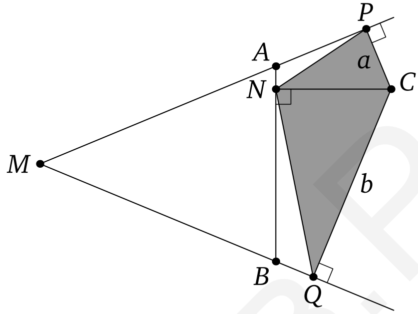
Пример 3. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены к этой окружности две касательные. Расстояния от точки C, лежащей



на окружности, до касательных равны a и b. Найдите расстояние от точки C до прямой AB, где A и B — точки касания.

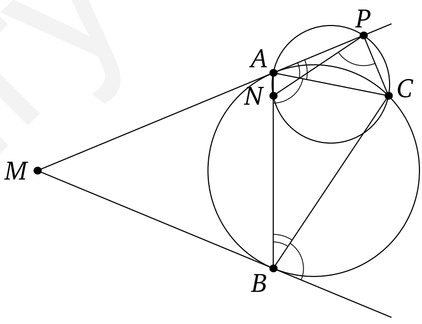
Ответ: $\sqrt{ab}$.

Р е ш е н и е. Пусть P, Q, N — основания перпендикуляров, опущенных из точки C на прямые MA, MB, AB соответственно. Докажем, что треугольник PCN подобен треугольнику NCQ.



Действительно, отрезок AC виден из точек P и N под прямым углом. Значит, точки P и N лежат на окружности с диаметром AC.

Аналогично точки N и Q лежат на окружности с диаметром BC. Поэтому $\angle CPN = \angle CAN = \angle CAB$, а из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle CAB = \angle CBQ = \angle CNQ$, значит, $\angle CPN = \angle CNQ$. Аналогично $\angle CNP = \angle CQN$.



Значит, треугольники PCN и NCQ подобны по двум углам. Тогда $\frac{CN}{CQ} = \frac{CP}{CN}$, поэтому $CN^2 = CP \cdot CQ = ab$. Следовательно, $CN = \sqrt{ab}$. ◁

Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

14.1. Боковая сторона треугольника разделена на пять равных частей; через точки деления проведены прямые, параллельные основанию. Найдите отрезки этих прямых, заключённые между боковыми сторонами, если основание равно 20.

14.2. Точка M расположена на боковой стороне AB трапеции $ABCD$, причём $AM : BM = 2 : 1$. Прямая, проходящая через точку M параллельно основаниям AD и BC, пересекает боковую сторону CD в точке N. Найдите MN, если $AD = 18$, $BC = 6$.

14.3. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{3}{2}$. Найдите MN, если $BC = a$ и $AD = b$.

14.4. На диагоналях AC и BD трапеции $ABCD$ взяты соответственно точки M и N, причём $AM : MC = DN : NB = 1 : 4$. Найдите MN, если основания $AD = a$, $BC = b$ $(a > b)$.

14.5. В прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите сторону квадрата.

14.6. В прямоугольном треугольнике ABC катет AB равен 21, а катет BC равен 28. Окружность, центр O которой лежит на гипотенузе AC, касается обоих катетов. Найдите радиус окружности.

14.7. Точка M лежит на боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC, причём $BM = BC$. Найдите MC, если $BC = 1$ и $AB = 2$.

14.8. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC, причём $\angle ABD = \angle BCA$. Найдите отрезки AD и DC, если $AB = 2$ и $AC = 4$.

14.9. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны 12 и 18 и пересекаются в точке O. Найдите стороны четырёхугольника с вершинами в точках пересечения медиан треугольников AOB, BOC, COD и AOD.

Тренировочные задачи

14.10. В круге проведены две хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M; K — точка пересечения биссектрисы угла BMD с хордой

BD. Найдите отрезки BK и KD, если $BD = 3$, а площади треугольников CMB и AMD относятся как $1 : 4$.

14.11. В прямоугольной трапеции основания равны 17 и 25, а большая боковая сторона равна 10. Через середину M этой стороны проведён к ней перпендикуляр, пересекающий продолжение второй боковой стороны в точке P. Найдите MP.

14.12. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 12$ и $BC = 8$. На продолжении стороны BC отложен отрезок $CM = 2{,}4$. В каком отношении прямая AM делит площадь трапеции $ABCD$?

14.13. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри трапеции, если основания трапеции равны a и b.

14.14. В угол вписаны касающиеся внешним образом окружности радиусов r и R $(r < R)$. Первая из них касается сторон угла в точках A и B. Найдите AB.

14.15. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как $2 : 3$. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри трапеции.

14.16. Около окружности описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции равна 4, отрезок, соединяющий точки касания боковых сторон с окружностью, равен 1. Найдите диаметр окружности.

14.17. В некоторый угол вписана окружность радиуса 5. Хорда, соединяющая точки касания, равна 8. К окружности проведены две касательные, параллельные хорде. Найдите стороны полученной трапеции.

14.18. Расстояние от центра O окружности, описанной около треугольника ABC, до стороны BC равно 1. Найдите расстояние от точки пересечения высот до вершины A.

14.19. Через точку C проведены две прямые, касающиеся заданной окружности в точках A и B. На большей из дуг AB взята точка D, для которой $CD = 2$ и $\sin\angle ACD \cdot \sin\angle BCD = \frac{1}{3}$. Найдите расстояние от точки D до хорды AB.

14.20. В трапеции $ABCD$ основание $AB = a$, основание $CD = b$ $(a < b)$. Окружность, проходящая через вершины A, B и C, касается стороны AD. Найдите диагональ AC.

14.21. Точка пересечения медиан треугольника ABC, вершина A и середины сторон AB и AC лежат на одной окружности. Найдите медиану, проведённую из вершины A, если $BC = a$.

14.22. Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD. Проведена окружность с центром в точке D радиусом, равным AD. Она пересекает стороны треугольника AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите сторону AC, если известно, что $AB = c$, $AM = m$ и $AN = n$.

14.23. В треугольнике ABC угол C — тупой, D — точка пересечения прямой DB, перпендикулярной к AB, и прямой DC, перпендикулярной к AC. Высота треугольника ADC, проведённая из вершины C, пересекает AB в точке M. Известно, что $AM = a$, $MB = b$. Найдите AC.

14.24. Через центр окружности, описанной около треугольника ABC, проведены прямые, перпендикулярные сторонам AC и BC. Эти прямые пересекают высоту CH треугольника или её продолжение в точках P и Q. Известно, что $CP = p$, $CQ = q$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

14.25. Через центр O окружности, описанной вокруг остроугольного треугольника ABC, проведена прямая, перпендикулярная BO и пересекающая отрезок AB в точке P и продолжение отрезка BC за точку C в точке Q. Найдите BP, если известно, что $AB = c$, $BC = a$ и $BQ = p$.

14.26. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если $BC = 4$, а $AK = 6$.

14.27. Продолжение медианы треугольника ABC, проведённой из вершины A, пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D. Найдите BC, если $AC = DC = 1$.

14.28. Радиус окружности, описанной около треугольника KLM, равен R. Через вершину L проведена прямая, перпендикулярная стороне KM. Эту прямую пересекают в точках A и B серединные перпендикуляры к сторонам KL и LM соответственно. Известно, что $AL = a$. Найдите BL.

14.29. В окружности проведены диаметр MN и хорда AB, параллельная диаметру MN. Касательная к окружности в точке M пересекает прямые NA и NB соответственно в точках P и Q. Известно, что $MP = p$, $MQ = q$. Найдите MN.

14.30. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Вокруг треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведённая в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D и F

лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $AF = a$, $AD = b$. Найдите EF.

14.31*. Боковая сторона AB трапеции $ABCD$ перпендикулярна основаниям AD и BC. Прямая, перпендикулярная стороне CD, пересекает сторону AB в точке M, а сторону CD — в точке N. Известно также, что $MC = a$, $BN = b$, а расстояние от точки D до прямой MC равно c. Найдите расстояние от точки A до прямой BN.

14.32*. В треугольник ABC со сторонами $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 7$ вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне AC, одна на стороне AB и одна на стороне BC. Через середину D стороны AC и центр квадрата проведена прямая, которая пересекается с высотой BH треугольника ABC в точке M. Найдите площадь треугольника DMC.

14.33*. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке D. Прямая AD вторично пересекает большую окружность в точке M. Найдите MB, если $MA = a$, $MD = b$.

14.34*. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки A до прямых BC, DC и DE равны соответственно a, b и c. Найдите расстояние от вершины A до прямой BE.

Задачи на доказательство и вычисление

14.35. Две стороны треугольника равны 6 и 12, косинус угла между ними равен $\frac{1}{4}$. В треугольник вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол, заключённый между данными сторонами (вершина ромба, противоположная вершине этого угла, лежит на третьей стороне треугольника).

а) Докажите, что данный треугольник равнобедренный.

б) Найдите сторону ромба.

14.36. Первая окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается боковой стороны AB в точке P, а основания BC — в точке M. Вторая окружность с центром O_1, касающаяся основания BC и продолжений боковых сторон, касается прямой AB в точке Q.

а) Докажите, что треугольник PMQ прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что высота треугольника, проведённая из вершины A, равна 45, а точка P делит боковую сторону AB в отношении 9:8, считая от вершины A.

14.37. Высота CH, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника ABC, пересекает биссектрису AD в точке K.

а) Докажите, что $\frac{AH}{KH}=\frac{AC}{CD}$.

б) Найдите острые углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{AK}{KD}=1+\sqrt{2}$.

14.38. Диагонали вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а $AB=BC$.

а) Докажите, что треугольник BMC подобен треугольнику BCD.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCM, если известно, что радиус исходной окружности равен R, $AB=BC=a$, $BD=m$.

14.39. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

а) Докажите, что $KT \parallel DE$.

б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD=6$ и $KT=3$.

14.40. Около треугольника ABC описана окружность. Диаметр AD пересекает сторону BC в точке E, при этом $AE=AC$.

а) Докажите, что $BD=BE$.

б) Найдите отношение $DE:AE$, если известно, что $BE:CE=2:3$.

14.41. На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$, расположенные вне трапеции.

а) Докажите, что прямая FG проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

б) Прямая, проходящая через центры квадратов, пересекает основание BC в точке M. Найдите BM, если известно, что $BC=20$, $AC \perp BD$ и $BD:AC=3:2$.

14.42. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка X лежит на его стороне AD, причём $BX \parallel CD$ и $CX \parallel BA$.

а) Докажите, что прямые BX и CX разбивают четырёхугольник $ABCD$ на три подобных треугольника.

б) Найдите BC, если $AX=\frac{3}{2}$ и $DX=6$.

14.43. Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Отрезок AN пересекает окружность в точке K, а луч MK пересекает основание AD в точке L.

а) Докажите, что треугольник AKL подобен треугольнику MAL.

б) Найдите отношение $AL:LD$.

14.44. В остроугольном треугольнике ABC на высоте AD взята точка M, а на высоте BP — точка N так, что углы BMC и ANC прямые.

а) Докажите, что $CM=CN$.

б) Найдите биссектрису CL треугольника CMN, если известно, что расстояние между точками M и N равно $4+2\sqrt{3}$, а $\angle MCN=30^\circ$.

§ 15. Некоторые свойства высот и точки их пересечения. Решение задачи 15 из диагностической работы

15. Углы при вершинах A и C треугольника ABC равны 45° и 60° соответственно; AM, BN и CK — высоты треугольника. Найдите отношение $\frac{MN}{KN}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Р е ш е н и е. Из прямоугольных треугольников BNC и AMC находим, что

$$CN = BC\cos 60^\circ = \frac{1}{2}BC, \quad CM = AC\cos 60^\circ = \frac{1}{2}AC,$$

поэтому

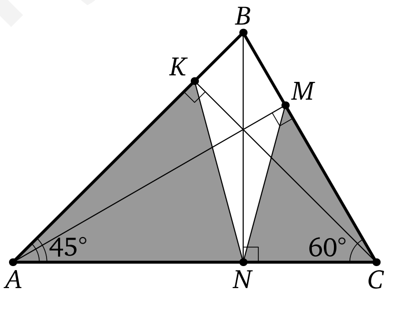
$$\frac{CN}{CM} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}AC} = \frac{BC}{AC}.$$

Значит, треугольник CMN подобен треугольнику CAB по двум сторонам и углу между ними (угол C — общий), причём коэффициент подобия равен $\frac{CM}{AC} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $MN = \frac{1}{2}AB$.

Аналогично получим, что треугольник AKN подобен треугольнику ACB, причём коэффициент подобия равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, $KN = \frac{\sqrt{2}}{2}BC$.

По теореме синусов

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

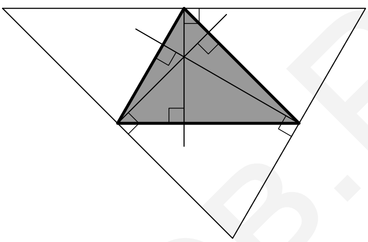


Следовательно,

$$\frac{MN}{KN} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \triangleleft$$

* * *

Известно, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Отсюда можно вывести, что прямые, на которых лежат высоты треугольника, также пересекаются в одной точке. Это можно сделать так. Через вершины данного треугольника проведём прямые, параллельные противолежащим сторонам. Рассмотрим треугольник с вершинами в точках пересечения проведённых прямых. Высоты исходного треугольника лежат на серединных перпендикулярах построенного. Поэтому содержащие их прямые пересекаются в одной точке.



Отметим некоторые важные свойства высот и точки их пересечения — ортоцентра треугольника (AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты непрямоугольного треугольника ABC, H — ортоцентр треугольника).

1) Точки B, C, B_1 и C_1 лежат на одной окружности, причём BC — её диаметр.

2) Треугольник ABB_1 подобен треугольнику ACC_1.

3) $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$.

4) Треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC, причём коэффициент подобия равен $|\cos\angle A|$.

5) Расстояние от точки H до вершины треугольника вдвое больше расстояния от центра O описанной окружности до стороны, противоположной этой вершине.

6) $\angle BAH = \angle CAO$.

7) $OA \perp B_1C_1$.

8) Точки, симметричные ортоцентру H относительно сторон треугольника, лежат на описанной окружности треугольника.

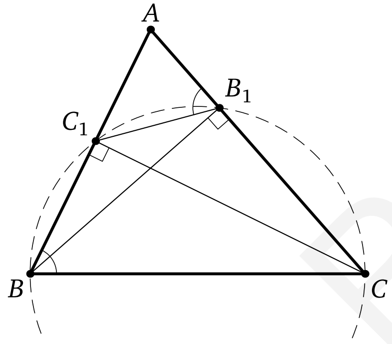
Докажем эти свойства для остроугольного треугольника. С некоторыми несущественными изменениями это доказательство годится и для тупоугольного.

Доказательство. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC. Из точек B_1 и C_1 сторона BC видна под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром BC.

Прямоугольные треугольники ABB_1 и ACC_1 подобны по двум углам.

Противоположные углы CBC_1 и CB_1C_1 вписанного четырёхугольника BC_1B_1C в сумме составляют 180°, поэтому

$$\angle ABC = \angle C_1BC = 180^\circ - \angle CB_1C_1 = \angle AB_1C_1.$$

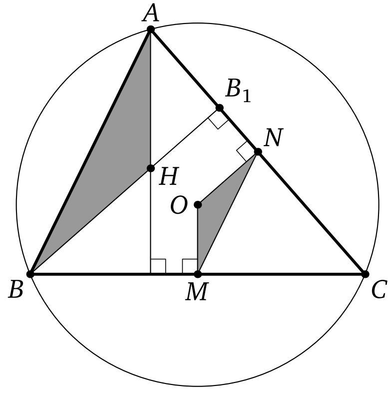


Треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC по двум углам. Пусть k — коэффициент подобия. Тогда

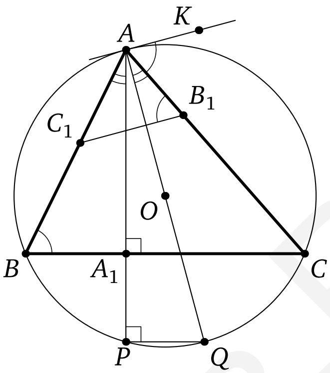
$$k = \frac{AC_1}{AC} = \cos\angle BAB_1 = \cos\angle BAC$$

(AC_1 и AC — соответствующие стороны подобных треугольников AB_1C_1 и ABC, т. к. они лежат против равных углов, а $\frac{AC_1}{AC}$ — отношение прилежащего к углу CAC_1 катета к гипотенузе в прямоугольном треугольнике ACC_1).

Перпендикуляры OM и ON, опущенные из центра O описанной окружности на стороны соответственно BC и AC, проходят через середины этих сторон. Тогда MN — средняя линия треугольника ABC.

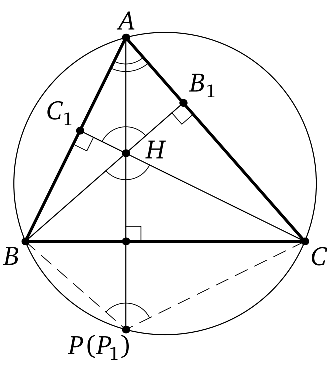


Значит, $MN \parallel AB$ и $MN = \frac{1}{2}AB$, а т. к. $OM \perp BC$ и $AH \perp BC$, то $OM \parallel AH$. Аналогично, $ON \parallel BH$. Треугольник AHB подобен треугольнику MON по двум углам, причём коэффициент подобия $\frac{AB}{MN}$ равен 2. Следовательно, $AH = 2OM$.



Пусть лучи AA_1 и AO пересекают описанную окружность в точках P и Q соответственно. Тогда $\angle APQ = 90^\circ$, поскольку точка P лежит на окружности с диаметром AQ. Хорды PQ и BC параллельны, т. к. они перпендикулярны одной и той же прямой AP, значит, заключённые между ними дуги CQ и BP равны. Тогда равны и опирающиеся на эти дуги вписанные углы CAQ и BAP. Следовательно, $\angle BAH = \angle CAO$.

На касательной к описанной окружности треугольника ABC, проведённой через точку A, отметим такую точку K, что точки K и B лежат по разные стороны от прямой AC. Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle KAC = \angle ABC$. По ранее доказанному $\angle ABC = \angle AB_1C_1$, значит, $\angle KAC = \angle AB_1C_1$. Следовательно, $AK \parallel B_1C_1$, а поскольку $OA \perp AK$, получаем $OA \perp B_1C_1$.

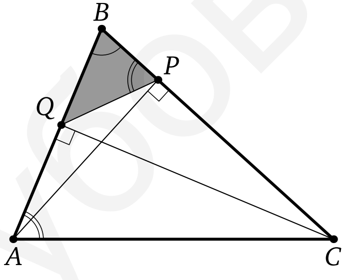


Заметим, что $\angle BHC = \angle B_1HC_1 = 180^\circ - \angle BAC$. Пусть P_1 — точка, симметричная ортоцентру H относительно прямой BC. Тогда $\angle BP_1C = \angle BHC$, поэтому $\angle BP_1C = \angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$. Значит, четырёхугольник ABP_1C — вписанный. Тогда точка P_1 лежит на описанной окружности треугольника ABC, а значит, совпадает с точкой P. Что и требовалось доказать. □

Пример 1. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а $PQ = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ: $\frac{9}{2}$.

Р е ш е н и е. Треугольники BPQ и BAC подобны по двум углам. Поскольку отношение их площадей равно $\frac{2}{18} = \frac{1}{9}$, то коэффициент подобия равен $\frac{1}{3}$. Значит, $AC = 3PQ = 6\sqrt{2}$.



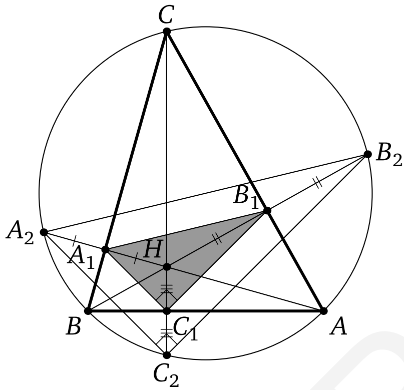
С другой стороны, коэффициент подобия равен $\frac{BP}{AB} = \cos\angle B$. Поэтому $\cos\angle B = \frac{1}{3}$. Тогда $\sin\angle B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Если R — радиус описанной окружности треугольника ABC, то по теореме синусов

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle B} = 6\sqrt{2} : \left(2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{9}{2}. \qquad \triangleleft$$

Пример 2. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, образуют прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 10. Найдите радиус окружности, описанной около исходного треугольника.

Ответ: 10.

Р е ш е н и е. Пусть H — точка пересечения высот AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC, $\angle A_1C_1B_1 = 90^\circ$, $A_1B_1 = 10$; A_2, B_2, C_2 — точки пересечения продолжений высот соответственно AA_1, BB_1, CC_1 с окружностью, описанной около треугольника ABC.

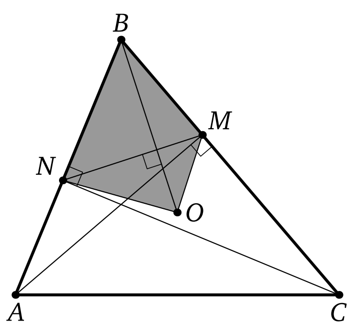


Тогда A_1, B_1, C_1 — середины отрезков HA_2, HB_2, HC_2. Значит, A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1 — средние линии треугольников A_2HB_2, B_2HC_2, A_2HC_2, поэтому стороны треугольника $A_2B_2C_2$ соответственно параллельны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, причём $A_2B_2 = 2A_1B_1$, $A_2C_2 = 2A_1C_1$, $B_2C_2 = 2B_1C_1$. Следовательно, треугольник $A_2B_2C_2$ также прямоугольный, а его гипотенуза A_2B_2 вдвое больше A_1B_1, т. е. равна 20. Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$ (а значит, и около треугольника ABC), равен 10. ◁

Пример 3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Известно, что $\angle ABC = \beta$, а площадь четырёхугольника $NOMB$ равна S. Найдите AC.

Ответ: $2\sqrt{S \operatorname{tg} \beta}$.

Р е ш е н и е. Пусть $OB = R$ — радиус описанной окружности треугольника ABC. Тогда $OB \perp MN$ и $OB = R = \dfrac{AC}{2 \sin \beta}$.



Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}MN \cdot OB = \frac{1}{2}AC\cos\beta \cdot \frac{AC}{2\sin\beta} = \frac{1}{4}AC^2 \operatorname{ctg}\beta.$$

Отсюда находим, что $AC = 2\sqrt{S\operatorname{tg}\beta}$. ◁

Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

15.1. Сторона треугольника равна $\sqrt{2}$, углы, прилежащие к ней, равны 75° и 60°. Найдите отрезок, соединяющий основания высот, проведённых из вершин этих углов.

15.2. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите площадь треугольника AMN, если площадь треугольника ABC равна S, а угол BAC равен α.

15.3. Точка M, лежащая вне круга с диаметром AB, соединена с точками A и B. Отрезки MA и MB пересекают окружность в точках C и D соответственно. Площадь круга, вписанного в треугольник AMB, в четыре раза больше, чем площадь круга, вписанного в треугольник CMD. Найдите углы треугольника AMB, если известно, что один из них в два раза больше другого.

15.4. Отрезок AB — диаметр окружности, а точка C лежит вне окружности. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и M соответственно. Найдите угол CBD, если площади треугольников DCM и ABC относятся как $1:4$.

15.5. В треугольнике ABC на средней линии DE, параллельной AB, как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N. Найдите MN, если $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

15.6. В треугольнике ABC известно, что $AB=c$, $BC=a$, $\angle ABC=120^\circ$. Найдите расстояние между основаниями высот, проведённых из вершин A и C.

15.7. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Найдите AC, если $BC=a$, $AB=b$, $\frac{DE}{AC}=k$.

15.8. Высоты BM и CN остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Сторону BC продолжили до пересечения с прямой MN в точке K. Сколько пар подобных треугольников при этом получилось?

Тренировочные задачи

15.9. В остроугольном треугольнике ABC с углом C, равным 30°, высоты пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника

AMB, если расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до сторон BC и AC соответственно равны $\sqrt{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15.10. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O — центр вписанной окружности. Известно, что $BC=24$, $MN=12$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

15.11. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол ACB.

15.12. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH=AB$. Найдите угол ACB.

15.13. В треугольнике ABC известно, что $AB=2$, $AC=5$, $BC=6$. Найдите расстояние от вершины B до точки пересечения высот.

15.14. На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника пополам и образует с прямой AB угол 15°. Найдите углы треугольника ABC.

15.15. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CM и AN. Известно, что $AC=2$, а площадь круга, описанного около треугольника MBN, равна $\frac{\pi}{3}$. Найдите угол между высотой CM и стороной BC.

15.16. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C на стороны BC и AB опущены высоты AP и CQ. Найдите сторону AC, если известно, что периметр треугольника ABC равен 15, периметр треугольника BPQ равен 9, а радиус окружности, описанной около треугольника BPQ, равен $\frac{9}{5}$.

15.17. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

15.18. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите площадь треугольника.

15.19. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и Q. Найдите радиус описанной окружности, если $AC=a$, $PQ=\frac{6a}{5}$.

15.20. В остроугольном треугольнике PQR ($PQ>QR$) проведены высоты PT и RS; QN — диаметр окружности, описанной около треугольника PQR. Известно, что острый угол между высотами PT и RS равен α, $PR=a$. Найдите площадь четырёхугольника $NSQT$.

15.21*. В треугольнике ABC проведены высота AH, равная h, медиана AM, равная m, и биссектриса AN. Точка N — середина отрезка MH. Найдите расстояние от вершины A до точки пересечения высот треугольника ABC.

Задачи на доказательство и вычисление

15.22. В треугольнике ABC с тупым углом при вершине A проведены высоты BM и CN.

а) Докажите, что $\angle ANM = \angle ACB$.

б) Найдите радиусы окружностей, описанных около треугольников BNC и AMN, если $\cos\angle BAC = -\frac{1}{3}$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 6.

15.23. Точки D и E — середины сторон соответственно AC и BC треугольника ABC. На отрезке DE как на диаметре построена окружность, пересекающая продолжения сторон AC и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что биссектрисы углов MEN и NDM пересекаются на этой окружности.

б) Найдите MN, если известно, что $AB = 14$, $BC = 10$, $AC = 6$.

15.24. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, H — точка пересечения высот.

а) Докажите, что точки B, D, H и E лежат на одной окружности.

б) Известно, что радиус этой окружности равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $AC = 2$. Найдите угол между высотой CE и стороной BC.

15.25. Высота AA_1 остроугольного треугольника ABC продолжена до пересечения с описанной окружностью в точке P, H — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности.

а) Докажите, что A_1 — середина отрезка HP.

б) Найдите OH, если известно, что $AH = 3$, $A_1H = 2$, а радиус окружности равен 4.

15.26. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AC и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. В треугольнике $A_1B_1C_1$ проведены высоты.

а) Докажите, что треугольник с вершинами в основаниях этих высот подобен треугольнику ABC.

б) Найдите коэффициент подобия, если известно, что радиус вписанной окружности треугольника ABC в три раза меньше радиуса описанной.

15.27. AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC с углом 45° при вершине C.

а) Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ прямоугольный.

б) Найдите отношение, в котором высота AA_1 делит отрезок B_1C_1, если известно, что $BC = 2B_1C_1$.

15.28. Точки A_1, B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC, O — центр его описанной окружности.

а) Докажите, что $OA \perp B_1C_1$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $A_1B_1 = 21$, $A_1C_1 = 17$, $B_1C_1 = 10$.

Диагностическая работа 1

1. Около треугольника со сторонами 6, 8 и 10 описана окружность S. Найдите максимальный радиус окружности, касающейся меньшей стороны треугольника в её середине и окружности S.

2. Дан треугольник со сторонами $AB = BC = 17$, $AC = 30$. Найдите общую хорду окружностей с диаметрами AB и AC.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CBD = 58^\circ$, $\angle ABD = 44^\circ$, $\angle ADC = 78^\circ$. Найдите угол CAD.

4. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ и пересекает сторону DC в единственной точке F, а сторону BC — в единственной точке E. Найдите площадь трапеции $AFCB$, если $AB = 32$, $AD = 40$ и $BE = 1$.

5. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Известно, что $\angle BAC = 120^\circ$ и $AA_1 = 6$. Найдите высоту AP треугольника AB_1C_1.

6. Центр окружности, вписанной в четырёхугольник, лежит на его диагонали, равной 5. Известно, что периметр четырёхугольника равен 14, а площадь равна 12. Найдите вторую диагональ и стороны четырёхугольника.

Диагностическая работа 2

1. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведённая к третьей стороне, равна 5. Найдите третью сторону и площадь треугольника.

2. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом. Кроме того, обе эти окружности касаются внутренним образом окружности радиуса R с центром O. Найдите периметр треугольника OO_1O_2.

3. Точки D и E расположены на стороне AC треугольника ABC. Прямые BD и BE разбивают медиану AM треугольника ABC на три равных отрезка. Найдите площадь треугольника BDE, если площадь треугольника ABC равна 1.

4. Сторона AB правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна $\sqrt{3}$ и является хордой некоторой окружности, причём остальные стороны шестиугольника лежат вне этой окружности. Прямая, проходящая через вершину C, касается окружности в точке M. Известно, что $CM = 3$. Найдите диаметр окружности.

5. Центр окружности радиуса 6, касающейся сторон AB, BC и CD равнобедренной трапеции $ABCD$, лежит на её большем основании AD. Основание BC равно 4. Найдите расстояние между точками, в которых окружность касается боковых сторон AB и CD этой трапеции.

6. Углы при вершинах A и B треугольника ABC равны 75° и 45° соответственно, AA_1 и BB_1 — высоты треугольника. Касательная в точке C к окружности, описанной около треугольника A_1B_1C, пересекается с прямой AA_1 в точке K. Известно, что $CK = a$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Диагностическая работа 3

1. Медиана и высота прямоугольного треугольника, проведённые из вершины прямого угла, равны 5 и 4. Найдите катеты.

2. Найдите периметр треугольника, один из углов которого равен α, а радиусы вписанной и описанной окружностей равны r и R соответственно.

3. В треугольник ABC со сторонами $AB = 18$ и $BC = 12$ вписан параллелограмм $BKLM$, причём точки K, L и M лежат на сторонах AB, AC и BC соответственно. Известно, что площадь параллелограмма составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника ABC. Найдите стороны параллелограмма.

4. Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Расстояния от концов A и B гипотенузы AB до прямой, касающейся окружности в точке C, равны a и b соответственно. Найдите катеты AC и BC.

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C сторона $CA = 4$. На катете BC взята точка D, причём $CD = 1$. Окружность радиуса $\frac{\sqrt{5}}{2}$ проходит через точки C и D и касается в точке C окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC.

6. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами a и b построены квадраты, лежащие вне треугольника. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах квадратов.

Диагностическая работа 4

1. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, площадь которого равна 75, расположены точки M, N и K соответственно. Известно, что M — середина AB, площадь треугольника BMN равна 15, а площадь треугольника AMK равна 25. Найдите площадь треугольника CNK.

2. Окружность S с центром в вершине прямого угла прямоугольного треугольника касается окружности, вписанной в этот треугольник. Найдите радиус окружности S, если известно, что катеты треугольника равны 5 и 12.

3. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

4. Через середину боковой стороны равнобедренного треугольника со сторонами 12, 18, 18 проведена прямая, разбивающая треугольник на части, площади которых относятся как $1:2$. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри треугольника.

5. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и AC в точках M и N. Окружность с центром Q вписана в треугольник AMN. Найдите OQ, если $AB = 13$, $BC = 15$ и $AC = 14$.

6. Биссектрисы внутренних углов треугольника продолжены до пересечения с описанной около треугольника окружностью. В результате попарного соединения этих точек получился новый треугольник. Известно, что углы исходного треугольника равны $30°$, $60°$ и $90°$, а его площадь равна 2. Найдите площадь нового треугольника.

Диагностическая работа 5

1. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D, причём $AD : BD = 1 : 3$. Высота, опущенная из вершины C прямого угла на гипотенузу, равна 3. Найдите катет BC.

2. Диагональ равнобедренной трапеции делит её тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3, периметр равен 42. Найдите площадь трапеции.

3. Окружности радиусов r и R касаются внешним образом в точке K. Прямая касается этих окружностей в различных точках A и B. Найдите площадь треугольника AKB.

4. Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

5. Точка M делит среднюю линию треугольника ABC, параллельную стороне BC, на отрезки, один из которых в три раза длиннее другого. Точка N также делит сторону BC на отрезки, один из которых в три раза длиннее другого. В каком отношении прямая MN делит площадь треугольника ABC?

6. Площадь ромба $ABCD$ равна 2. В треугольник ABD вписана окружность, которая касается стороны AB в точке K. Через точку K проведена прямая KL, параллельная диагонали AC ромба (точка L лежит на стороне BC). Известно, что площадь треугольника KLB равна $\frac{1}{3}$. Найдите косинус угла BAD.

Диагностическая работа 6

1. Найдите радиус окружности, касающейся двух концентрических (имеющих один и тот же центр) окружностей радиусов 3 и 5.

2. Окружность, построенная как на диаметре на меньшей боковой стороне прямоугольной трапеции, касается большей боковой стороны, равной a. Найдите среднюю линию трапеции.

3. Точка D делит основание BC равнобедренного треугольника ABC на два отрезка, один из которых на 4 больше другого. Найдите расстояние между точками, в которых вписанные окружности треугольников ABD и ACD касаются отрезка AD.

4. Диагонали AC и BD вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке Q под прямым углом. Прямые AB и CD пересекаются в точке P. Известно, что $BC = 5$, $AD = 10$, $BQ = 3$. Найдите AP.

5. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, касается его вписанной окружности. Отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 2,4. Найдите сторону AB, если известно, что периметр треугольника ABC равен 20.

6. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через точки A и B и пересекает прямую BC в точке M, отличной от B и C. Найдите расстояние от точки O до центра окружности, описанной около треугольника ACM.

Приложение 1. Избранные задачи тренировочных и экзаменационных работ 2010 и 2011 годов

1. В треугольнике ABC известно, что $AB=18$, $BC=16$, $\cos\angle B=\frac{4}{9}$, AH — высота. Через точку H, проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону AB в точке M. Найдите HM.

Р е ш е н и е. По теореме косинусов

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle B}=\sqrt{18^2+16^2-2\cdot18\cdot16\cdot\frac{4}{9}}=18,$$

поэтому треугольник ABC равнобедренный с основанием BC, значит, H — середина BC.

Заметим, что существует ровно два случая расположения точки M на стороне AB: либо $\angle BHM=\angle BCA$ (рис. 1), либо $\angle BHM=\angle BAC$ (рис. 2).

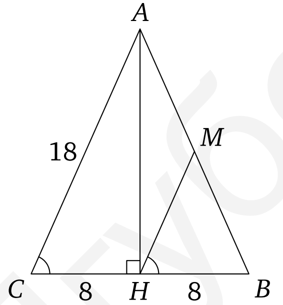


Рис. 1

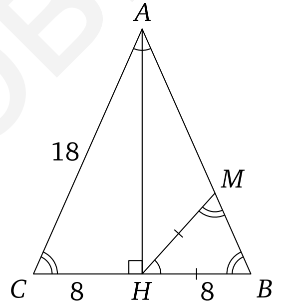


Рис. 2

В первом из этих случаев $HM\parallel BC$. Тогда HM — средняя линия треугольника ABC, следовательно, $HM=\frac{1}{2}AC=9$.

Пусть теперь $\angle BHM=\angle BAC$. Тогда треугольник BAM подобен равнобедренному треугольнику BAC, следовательно,

$$HM=HB=\frac{1}{2}BC=8. \qquad \triangleleft$$

Ответ: 9 или 8.

2. Точка H — основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку H, проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке M. Найдите HM.

Ответ: $\frac{7}{3}$ или $\frac{14}{5}$.

3. Точка P — основание высоты треугольника со сторонами 6, 7, 8, опущенной на сторону, равную 7. Через точку P, проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 6, в точке Q. Найдите PQ.

Ответ: $\dfrac{12}{7}$ или 2.

4. В треугольнике KLM известно, что $KM = 15$, $LM = 12$, $\cos\angle M = \dfrac{2}{5}$, KE — высота. Через точку E, проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону KM в точке F. Найдите EF.

Ответ: 7,5 или 6.

5. Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Этих окружностей и их общей внешней касательной касается третья окружность. Найдите её радиус.

Р е ш е н и е. Докажем сначала следующее утверждение. Если a — расстояние между центрами окружностей радиусов r и R, общая внешняя касательная касается этих окружностей соответственно в точках A и B и при этом $a \geqslant r + R$, то $AB = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$.

Действительно, пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов r и R соответственно (рис. 3). Из точки O_1 опустим перпендикуляр O_1Q на прямую O_2B. Из прямоугольного треугольника O_1QO_2 находим, что

$$O_1Q = \sqrt{O_1O_2^2 - FO_2^2} = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}.$$

Следовательно, $AB = O_1F = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$. Утверждение доказано.

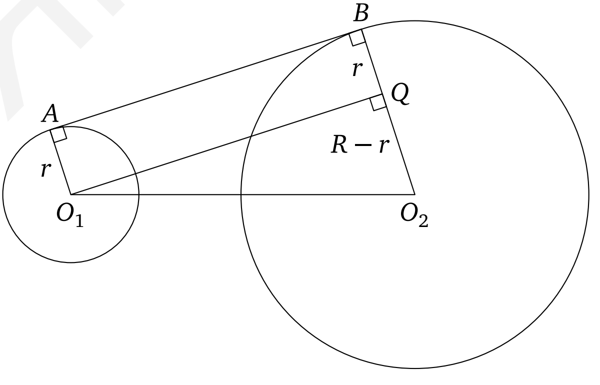


Рис. 3

В частности, если окружности касаются внешним образом, то $a = R + r$. В этом случае

$$AB = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r))^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Пусть x — радиус искомой окружности, C — её точка касания с прямой AB. По доказанному

$$AB = \sqrt{17^2 - (9-1)^2} = 15,$$
$$AC = \sqrt{(x+1)^2 - (x-1)^2} = 2\sqrt{x},$$
$$BC = \sqrt{(x+9)^2 - (x-9)^2} = 2\sqrt{9x} = 6\sqrt{x}.$$

Если искомая окружность касается прямой AB в точке C, лежащей между A и B (рис. 4), то $AC + CB = AB$, или $2\sqrt{x} + 6\sqrt{x} = 15$. Тогда $\sqrt{x} = \frac{15}{8}$. Следовательно, $x = \frac{225}{64}$.

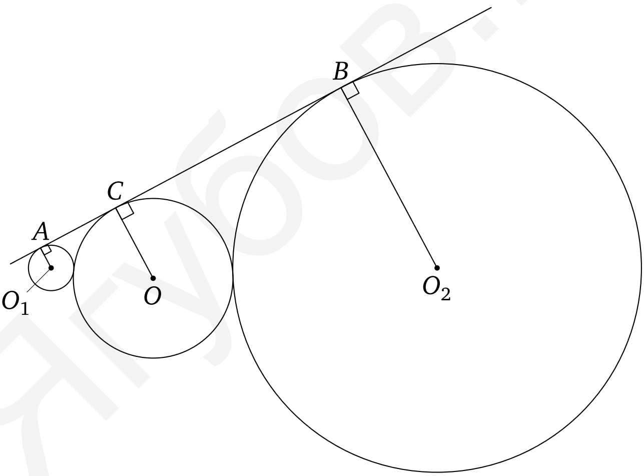


Рис. 4

Если искомая окружность касается прямой AB в точке C, лежащей на продолжении отрезка AB (рис. 5), то $CB - AC = AB$, или $6\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 15$. Тогда $\sqrt{x} = \frac{15}{4}$. Следовательно, $x = \frac{225}{16}$.

Пусть искомая окружность радиуса x касается прямой AB, внутренним образом касается окружности с центром O_1 в точке A, а внешним образом — окружности с центром O_2 (рис. 6). Тогда $AB = 2\sqrt{9x}$, или $15 = 6\sqrt{x}$, откуда находим, что $x = \frac{25}{4}$.

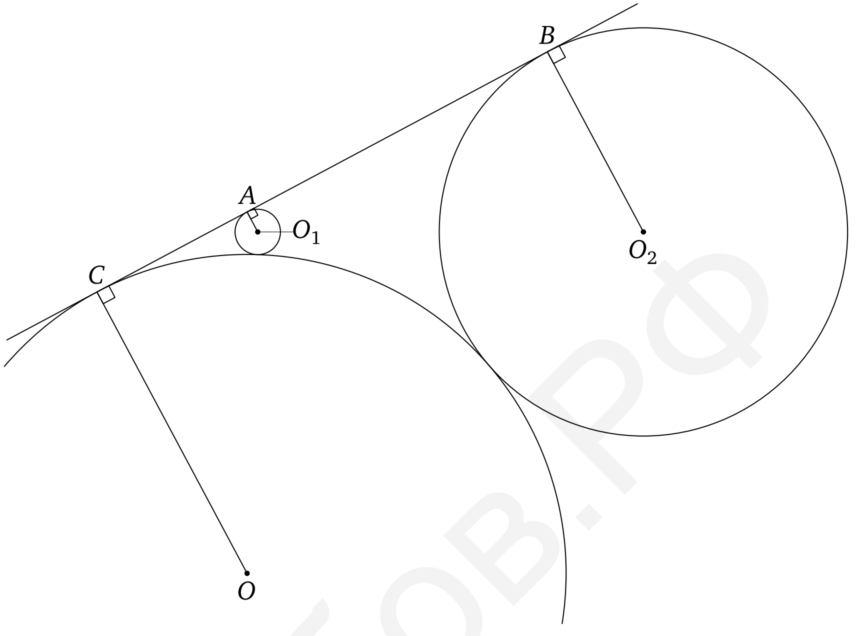


Рис. 5

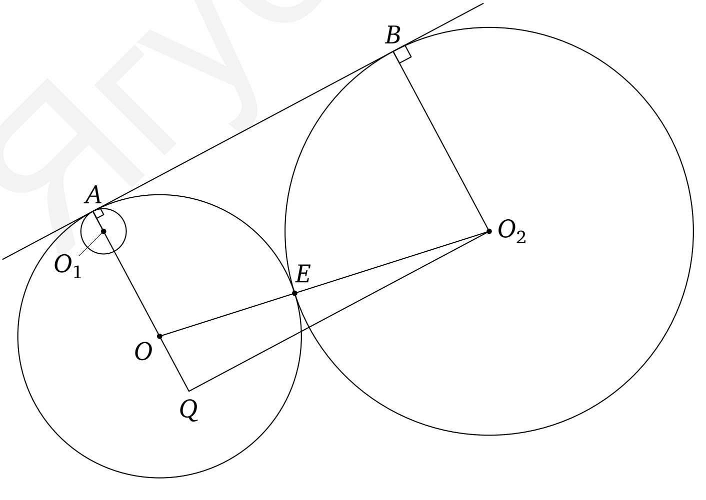


Рис. 6

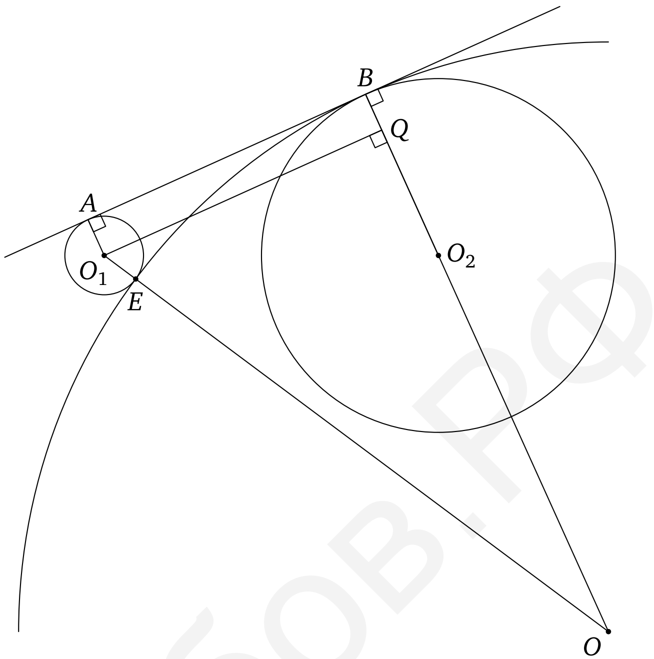


Рис. 7

Наконец, если искомая окружность радиуса x касается прямой AB, внутренним образом касается окружности с центром O_2 в точке B, а внешним образом — окружности с центром O_1 (рис. 7), то аналогично получим уравнение $15 = 2\sqrt{1 \cdot x}$, из которого находим, что $x = \frac{225}{4}$. ◁

Ответ: $\frac{225}{64}$, $\frac{225}{16}$, $\frac{25}{4}$ или $\frac{225}{4}$.

6. Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Этих окружностей и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найдите её радиус.

Ответ: $\frac{21}{4}$ или $\frac{189}{4}$.

7. Площадь трапеции $ABCD$ равна 90. Диагонали пересекаются в точке O, отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Р е ш е н и е. Пусть $AD = 2BC$ (рис. 8). Четырёхугольники $ABCP$ и $BCDP$ — параллелограммы, поэтому M и N — середины BP и CP, значит, CM и BN — медианы треугольника BPC.

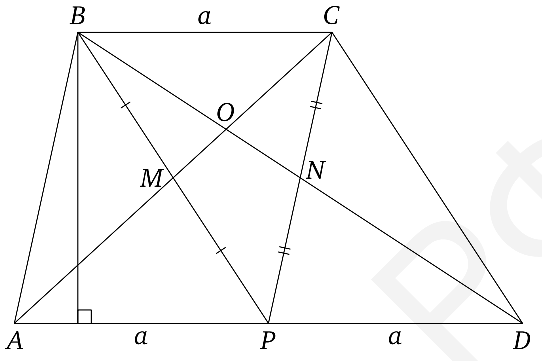


Рис. 8

Пусть h — высота трапеции. Положим $BC = a$, $AD = 2a$. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2}h = \frac{3}{2}ah = 90, \quad ah = 60.$$

Следовательно,

$$S_{OMPN} = \frac{1}{3}S_{\Delta BPC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}ah = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10.$$

Рассмотрим случай, когда $BC = 2AD$ (рис. 9). Пусть h — высота трапеции. Положим $BC = 2a$, $AD = a$, $AM = 3t$. Тогда $ah = 60$.

Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$, а треугольник AMP подобен треугольнику CMB с коэффициентом

$$\frac{AP}{BC} = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{1}{4}.$$

Тогда

$$MC = 4AM = 12t, \quad AC = AM + MC = 3t + 12t = 15t,$$

$$AO = \frac{1}{3}AC = 5t, \quad \frac{AM}{AO} = \frac{3t}{5t} = \frac{3}{5}.$$

Аналогично, $\frac{DN}{DO} = \frac{3}{5}$.

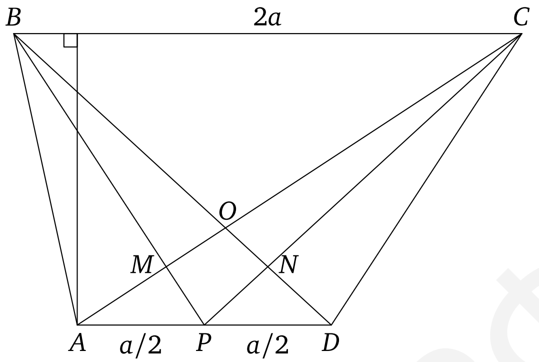


Рис. 9

Высота треугольника AOD, проведённая из вершины O, равна $\frac{1}{3}h$, значит,

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}ah = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10,$$

$$S_{\Delta DNP} = S_{\Delta AMP} = \frac{AM}{AO} \cdot \frac{AP}{AD} S_{\Delta AOD} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = 3.$$

Следовательно, $S_{OMPN} = S_{\Delta AOD} - S_{\Delta DNP} - S_{\Delta AMP} = 10 - 3 - 3 = 4.$ ◁

Ответ: 10 или 4.

8. Площадь трапеции $ABCD$ равна 405. Диагонали пересекаются в точке O, отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Ответ: $\frac{45}{4}$ или $\frac{36}{5}$.

9. Площадь трапеции $ABCD$ равна 240. Диагонали пересекаются в точке O, отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$, если одно из оснований трапеции втрое больше другого.

Ответ: 27 или $\frac{45}{7}$.

10. Площадь трапеции $ABCD$ равна 240. Диагонали пересекаются в точке O, отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции втрое больше другого.

Ответ: $\frac{27}{5}$ или $\frac{135}{49}$.

11. В окружности, радиус которой равен 5, проведена хорда $AB = 8$. Точка C лежит на хорде AB так, что $AC : BC = 1 : 2$. Найдите радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C.

Р е ш е н и е. Пусть E — проекция центра O данной окружности на хорду AB. Тогда E — середина AB и

$$OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$

Если искомая окружность с центром Q и радиусом r касается данной в точке D, то

$$OQ = OD - QD = 5 - r, \quad CE = AE - AC = 4 - \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{4}{3}.$$

Пусть F — проекция точки O на прямую QC. Тогда $OFCE$ — прямоугольник, поэтому $CF = OE = 3$ и $OF = CE = \frac{4}{3}$.

Рассмотрим случай, когда точки O и Q лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 10). Тогда $QF = QC + CF = QC + OE = r + 3$. По теореме Пифагора $OQ^2 = QF^2 + OF^2$, или $(5 - r)^2 = (r + 3)^2 + \frac{16}{9}$. Из этого уравнения находим, что $r = \frac{8}{9}$.

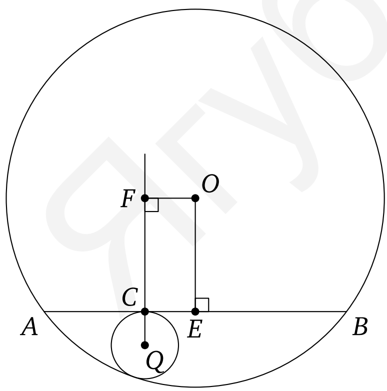


Рис. 10

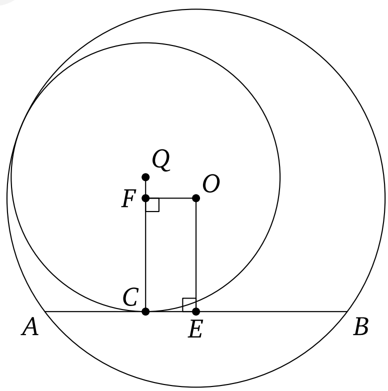


Рис. 11

Если же точки O и Q лежат по одну сторону от прямой AB (рис. 11), то аналогично получим уравнение $(5 - r)^2 = (r - 3)^2 + \frac{16}{9}$, из которого найдём, что $x = \frac{32}{9}$. ◁

Ответ: $\frac{8}{9}$ или $\frac{32}{9}$.

12. В треугольнике ABC $AB = 14$, $BC = 6$, $CA = 9$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 1 : 9$. Окружности, вписанные в треугольники ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Ответ: 4,9 или 5,5.

Р е ш е н и е. Докажем сначала следующее утверждение. Если окружность, вписанная в треугольник KLM, касается его стороны MK в точке P, то $MP = \frac{1}{2}(MK + ML - KL)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Q и R — точки касания вписанной окружности треугольника KLM со сторонами ML и KL соответственно (рис. 12). Тогда

$$MQ = MP, \quad KP = KR, \quad LQ = LR,$$

$$\begin{aligned} KL &= KR + LR = KP + LQ = \\ &= (MK - MP) + (ML - MQ) = \\ &= MK + ML - (MP + MQ) = \\ &= MK + ML - 2MP. \end{aligned}$$

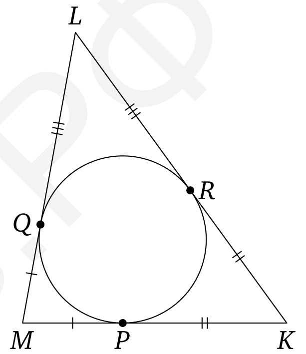


Рис. 12

Следовательно, $MP = \frac{1}{2}(MK + ML - KL)$, что и требовалось доказать.

Вернёмся к нашей задаче. Пусть вписанные окружности треугольников ADC и ABD касаются отрезка AD в точках E и F соответственно, причём точка D лежит на отрезке BC (рис. 13). Тогда по доказанному

$$AE = \frac{1}{2}(AD + AC - CD), \quad AF = \frac{1}{2}(AD + AB - BD),$$

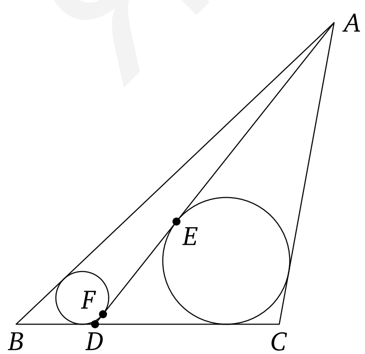


Рис. 13

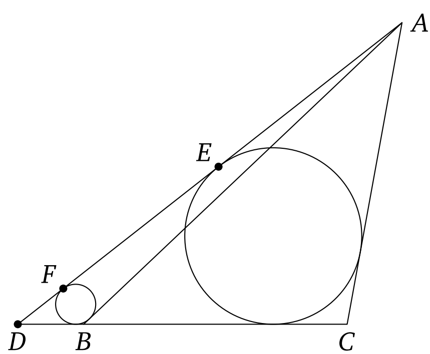


Рис. 14

значит,

$$EF = |AF - AE| = \left|\frac{1}{2}(AD + AB - BD) - \frac{1}{2}(AD + AC - CD)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}|AD + AB - BD - AD - AC + CD| = \frac{1}{2}|AB - AC - BD + CD| =$$
$$= \frac{1}{2}\left|AB - AC - \frac{1}{10}BC + \frac{9}{10}BC\right| = \frac{1}{2}\left|AB - AC + \frac{4}{5}BC\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\left|14 - 9 + \frac{4}{5}\cdot 6\right| = \frac{49}{10}.$$

Пусть теперь точка D лежит вне отрезка BC (рис. 14). Тогда она лежит на продолжении отрезка BC за точку B. Аналогично предыдущему случаю

$$EF = |AF - AE| =$$
$$= \frac{1}{2}|AB - AC - BD + CD| = \frac{1}{2}\left|AB - AC - \frac{1}{8}BC + \frac{9}{8}BC\right| =$$
$$= \frac{1}{2}|AB - AC + BC| = \frac{1}{2}|14 - 9 + 6| = \frac{11}{2}.$$

13. В треугольнике ABC $AB = 15$, $BC = 8$, $CA = 9$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 3 : 8$. Окружности, вписанные в треугольники ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Ответ: 7 или $\frac{53}{11}$.

14. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 1 : 5$. Найдите BC, если $AB = 3$.

Решение. Положим $BM = x$, $MN = 5x$. Точка M лежит между точками B и N, так как $BM < MN$.

Рассмотрим случай, когда AM и DN — биссектрисы углов при вершинах A и D параллелограмма $ABCD$ (рис. 15).

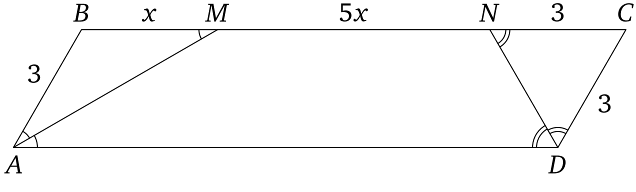


Рис. 15

Треугольник ABM — равнобедренный, так как $\angle AMB = \angle MAD = \angle BAD$, поэтому $BM = AB = 3$, т. е. $x = 3$. Тогда $MN = 5x = 15$. Аналогично, треугольник DCN — также равнобедренный и $CN = CD = AB = 3$. Следовательно,

$$BC = BM + MN + CN = 3 + 15 + 3 = 21.$$

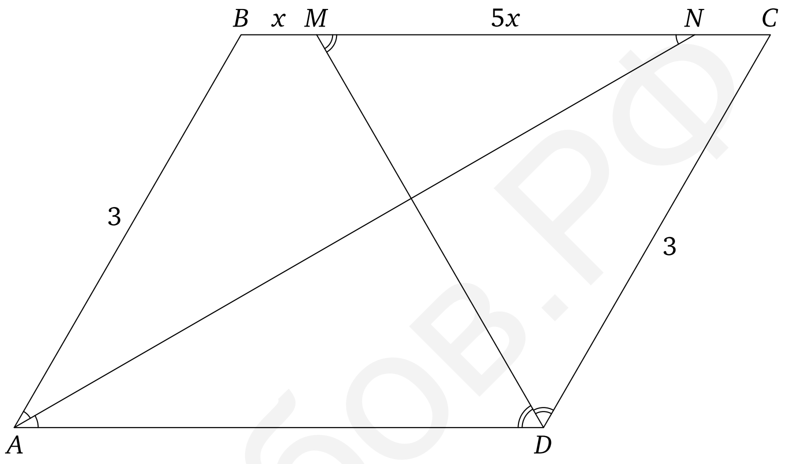


Рис. 16

Пусть теперь биссектрисы углов при основании AD — это лучи AN и DM (рис. 16). Тогда треугольники ABN и DCN — равнобедренные, $CM = CD = AB = 3$, $BN = BM + MN = x + 5x = 6x$ и $BN = AB = 3$. Из равенства $6x = 3$ находим, что $x = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$BC = BM + CM = x + 3 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}. \qquad \triangleleft$$

Ответ: 21 или 3,5.

15. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 1 : 7$. Найдите BC, если $AB = 12$.

Ответ: 13,5 или 108.

16. Окружность вписана в равнобедренную трапецию, основания которой равны 18 и 50. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

Р е ш е н и е. Пусть окружность радиуса R с центром O, вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $BC=18$ и $AD=50$, касается боковой стороны AB в точке M, а оснований AD и BC — в точках K и L соответственно. Тогда

$$BM = BL = \frac{1}{2}BC = 9, \quad AM = AK = \frac{1}{2}AD = 25,$$
$$AB = AM + BM = 25 + 9 = 34.$$

Отрезок OM — высота прямоугольного треугольника AOB, проведённая из вершины прямого угла AOB, поэтому $R=OM=\sqrt{AM\cdot BM}=$ $=\sqrt{25\cdot 9}=15.$

Пусть прямая, о которой говорится в условии задачи, проходит через вершину B и пересекает основание AD трапеции в точке P (рис. 17). Центр окружности, вписаной в угол, лежит на биссектрисе

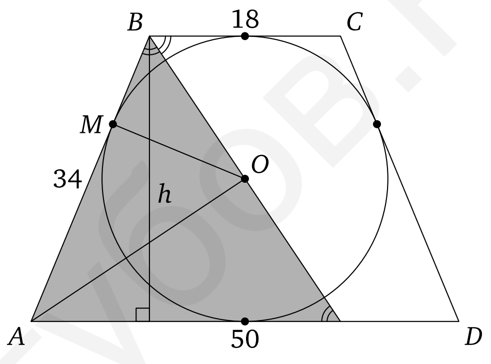


Рис. 17

угла, поэтому $\angle APB = \angle CBP = \angle ABP$, значит, треугольник ABP — равнобедренный, $AP=AB=34$. Следовательно,

$$S_{\Delta ABP} = 2S_{\Delta OAB} = 2\cdot\frac{1}{2}AB\cdot OM = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 34\cdot 15 = 510.$$

Если S — площадь трапеции $ABCD$, а h — её высота, то $h=2R=30$,

$$S = \frac{1}{2}(AD+BC)h = \frac{1}{2}(18+50)\cdot 30 = 34\cdot 30 = 1020.$$

Следовательно, $\dfrac{S_{\Delta ABP}}{S}=\dfrac{510}{1020}=\dfrac{1}{2}.$

(Искомое отношение можно вычислить и иначе. Пусть K и L — точки касания вписанной в трапецию окружности с основаниями BC и AD соответственно. Тогда K и L — середины оснований, прямоугольные треугольники POL и BOK равны по катету и прилежащему острому углу, поэтому треугольник ABP равновелик прямоугольной трапеции $ABKL$. Следовательно, $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$).

Поскольку трапеция равнобедренная, для прямой, проходящей через вершину C, получим тот же результат.

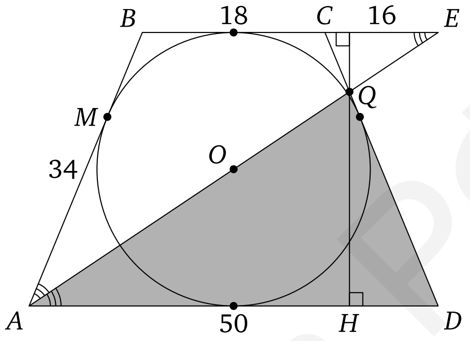


Рис. 18

Пусть теперь указанная прямая проходит через вершину A (рис. 18), пересекает боковую сторону CD в точке Q, а продолжение основания BC — в точке E. Треугольник ABE — равнобедренный ($\angle AEB = \angle DAE = \angle BAE$), поэтому

$$BE = AB = 34, \quad CE = BE - BC = AB - BC = 34 - 18 = 16.$$

Треугольник AQD подобен треугольнику EQC с коэффициентом $\frac{AD}{CE} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$, значит, если QH — высота треугольника AQD, то

$$QH = \frac{25}{33}h = \frac{25}{33} \cdot 30 = \frac{250}{11}, \quad S_{\triangle AQD} = \frac{1}{2} AD \cdot QH = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot \frac{250}{11} = \frac{6250}{11}.$$

Следовательно, $\frac{S_{\triangle AQD}}{S} = \frac{\frac{6250}{11}}{1020} = \frac{625}{1122}$.

Тот же результат для прямой, проходящей через вершину D. ◁

Ответ: $\frac{1}{2}$ или $\frac{625}{1122}$.

17. Окружность вписана в равнобедренную трапецию, большее основание которой равно 24, а синус угла при большем основании равен $\frac{3}{5}$. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

Ответ: $\frac{1}{2}$ или $\frac{81}{130}$.

18. Точки M, K и N лежат на сторонах соответственно AB, BC и AC треугольника ABC, причём $AMKN$ — параллелограмм, площадь которого составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника ABC. Найдите диагональ MN параллелограмма, если известно, что $AB = 21$, $AC = 12$ и $\angle BAC = 120^\circ$.

Р е ш е н и е. Пусть площадь треугольника NKC равна S, а $\frac{CK}{CB} = k$. Треугольник ABC подобен треугольнику NKC с коэффициентом $\frac{1}{k}$, а треугольник MBK — треугольнику NKC с коэффициентом $\frac{1-k}{k}$, поэтому

$$S_{\Delta ABC} = \left(\frac{1}{k}\right)^2 S_{\Delta NKC} = \left(\frac{1}{k}\right)^2 S,$$

$$S_{\Delta MBK} = \left(\frac{1-k}{k}\right)^2 S_{\Delta NKC} = \left(\frac{1-k}{k}\right)^2 S,$$

$$S_{AMKN} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta NKC} - S_{\Delta MBK} = \left(\frac{1}{k}\right)^2 S - S - \left(\frac{1-k}{k}\right)^2 S = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{k}\right)^2 S,$$

или

$$1 - k^2 - (1-k)^2 = \frac{4}{9},\ 9k^2 - 9k + 2 = 0,$$

откуда находим, что $k = \frac{1}{3}$ или $k = \frac{2}{3}$.

В первом из этих случаев (рис. 19)

$$AM = NK = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3} \cdot 21 = 7, \quad AN = MK = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8.$$

Следовательно,

$$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos 120^\circ} = \sqrt{49 + 64 + 56} = \sqrt{169} = 13.$$

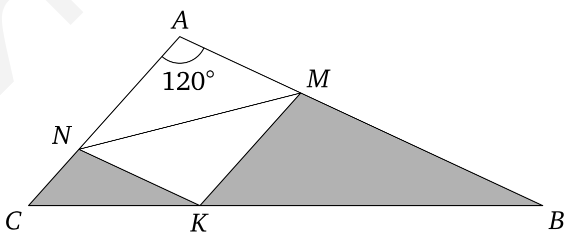


Рис. 19

Во втором случае (рис. 20)

$$AM = NK = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3} \cdot 21 = 14, \quad AN = MK = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4.$$

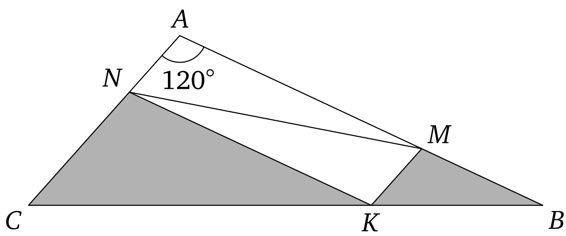


Рис. 20

Следовательно,

$$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos 120^\circ} = \sqrt{196+16+56} = \\ = 2\sqrt{49+4+14} = 2\sqrt{67}. \quad \triangleleft$$

Ответ: 13 или $2\sqrt{67}$.

19. Точки A, B и C лежат на сторонах соответственно KL, LM и KM треугольника KLM, причём $KABC$ — параллелограмм, площадь которого составляет $\frac{3}{8}$ площади треугольника KLM. Найдите диагональ AC параллелограмма, если известно, что $KL = 8$, $KM = 12$ и $\cos\angle LKM = \frac{7}{12}$.

Ответ: 8 или $2\sqrt{6}$.

20. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 6, а отношение катетов треугольника равно $\frac{3}{4}$.

Р е ш е н и е. Заметим, что окружность, вписанная в четырёхугольник, о котором говорится в условии задачи, — это окружность, вписанная в данный прямоугольный треугольник.

Пусть вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC касается катета AC в точке D, катета BC — в точке E, а гипотенузы AB — в точке F, а $\frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$. Пусть O — центр этой окружности, r — её радиус. Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}, \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad \sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}} = \frac{1}{3}.$$

Предположим, что прямая, проходящая через точку M, лежащую на гипотенузе, перпендикулярна гипотенузе, касается окружности в точке P и пересекает катет AC в точке N (рис. 21). Из прямоугольных

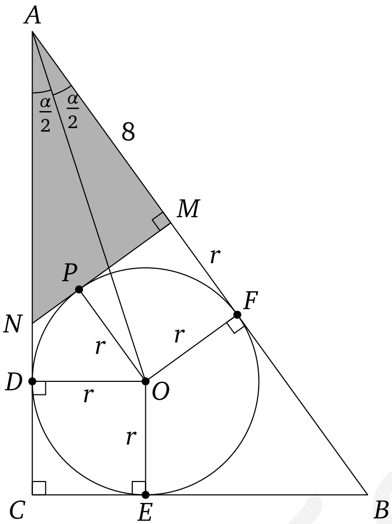


Рис. 21

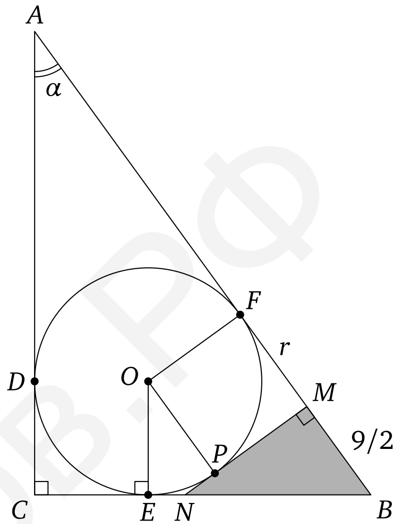


Рис. 22

треугольников AMN и AOF находим, что

$$AM = \frac{MN}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{6}{\frac{3}{4}} = 8, \quad AF = \frac{OF}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\frac{1}{3}} = 3r.$$

Четырёхугольники $ODCE$ и $OFMP$ — квадраты со стороной r, поэтому

$$MF = OP = r, \quad AM = AF - MF = 3r - r = 2r = 8.$$

Следовательно, $r = 4$.

Пусть теперь прямая, проходящая через точку M, лежащую на гипотенузе, перпендикулярна гипотенузе, касается окружности в точке P и пересекает катет BC в точке N (рис. 22). Тогда

$$BM = MN \operatorname{ctg}\angle MBN = MN \operatorname{tg}\alpha = 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{2},$$

$$AB = AF + MF + BM = 3r + r + \frac{9}{2} = 4r + \frac{9}{2},$$

а так как

$$AB = \frac{AC}{\cos\alpha} = \frac{AD + DC}{\cos\alpha} = \frac{AF + DC}{\cos\alpha} = \frac{3r + r}{\frac{4}{5}} = 5r,$$

то $4r + \frac{9}{2} = 5r$. Следовательно, $r = \frac{9}{2}$. ◃

Ответ: 4 или 4,5.

21. Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок прямой, заключённый внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно $\frac{5}{6}$.

Ответ: 5,25 или 5,5.

22. С центром в точке O, расположенной на биссектрисе угла, равного 60°, проведена окружность радиуса 4. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности внешним образом, если известно, что расстояние от точки O до вершины угла равно 10.

Р е ш е н и е. Пусть Q — центр искомой окружности радиуса x, M — точка касания с данной окружностью, B — точка касания с одной из сторон данного угла с вершиной A.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому $\angle BAQ = 30^\circ$. Из прямоугольного треугольника BAQ находим, что $AQ = 2QB = 2x$.

Пусть точка Q лежит между A и O (рис. 23). Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому $AO = AQ + QO$, или $10 = 2x + (x + 4)$, откуда находим, что $x = 2$.

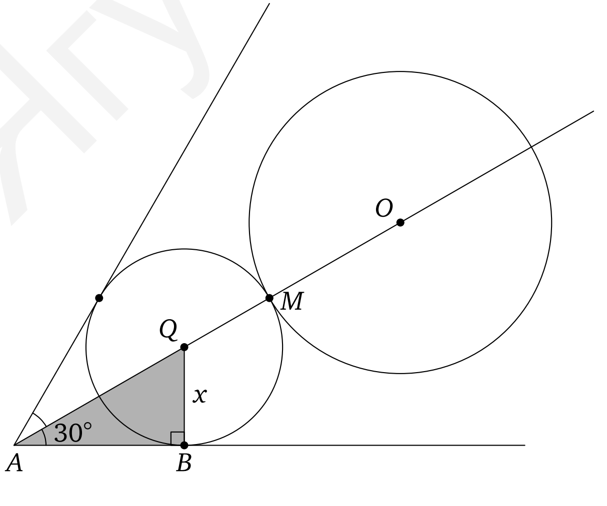


Рис. 23

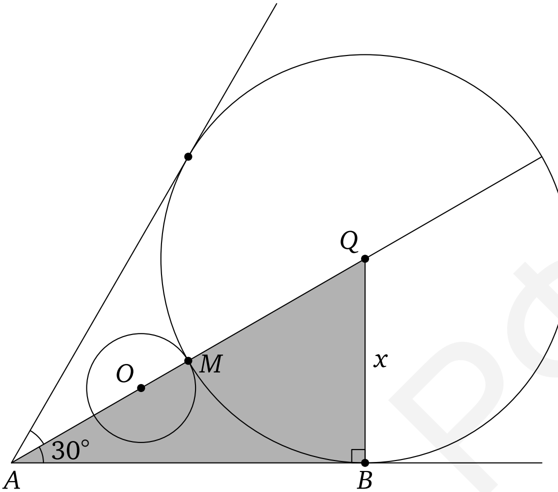


Рис. 24

Если точка O лежит между A и Q (рис. 24), то $AQ = AO + OQ$, или $2x = 10 + (4 + x)$, откуда $x = 14$. ◁

Ответ: 2; 14.

23. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 12$ и $BC = 5$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 8. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и внешним образом касающейся окружности S.

Р е ш е н и е. Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12}, \quad \cos\alpha = \frac{12}{13}, \quad \sin\alpha = \frac{5}{13}.$$

Пусть x — радиус искомой окружности, O — её центр, D — точка касания с лучом AC, M — точка касания с окружностью S, E — проекция точки O на прямую BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

$$\operatorname{ctg}\angle OAD = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1+\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = 5.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что

$$AD = OD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 5x.$$

Заметим, что условию задачи удовлеторяют две окружности: центр одной расположен внутри треугольника ABC (рис. 25), а центр второй — вне (рис. 26), причём искомая окружность касается окружности S внешним образом, значит,

$$BO = BM + MO = 8 + x.$$

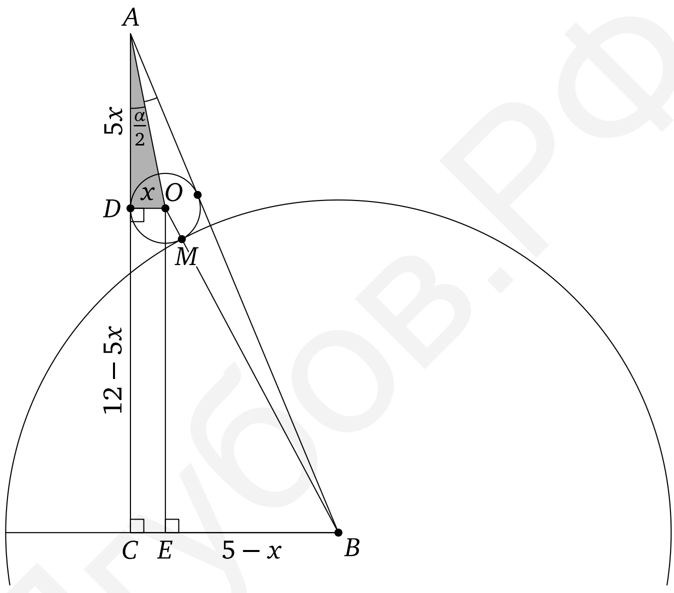


Рис. 25

В первом случае точка D лежит на катете AC, поэтому

$$OE = CD = AC - AD = 12 - 5x, \ \ BE = BC - CE = BC - OD = 5 - x,$$

причём $AD < AC$, т. е. $5x < 12$, $x < \frac{12}{5}$. По теореме Пифагора

$$BO^2 = OE^2 + BE^2,$$

или

$$(8+x)^2 = (12-5x)^2 + (5-x)^2, \quad 25x^2 - 146x + 105 = 0, \quad x < \frac{12}{5},$$

откуда находим, что $x = \frac{21}{25}$.

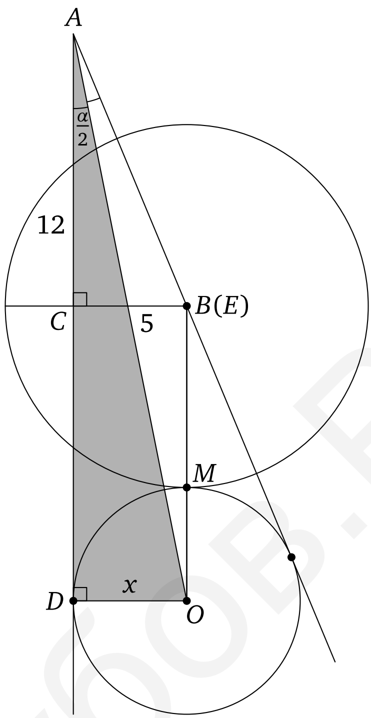


Рис. 26

Во втором случае точка D лежит на продолжении катета AC за точку C, поэтому

$$OE = CD = AD - AC = 5x - 12,$$

причём $AD > AC$, т. е. $x > \frac{12}{5}$. Тогда

$$(8+x)^2 = (5x-12)^2 + (5-x)^2, \quad 25x^2 - 146x + 105 = 0, \quad x > \frac{12}{5},$$

откуда находим, что $x = 5$ (это значит, что $OD = BC$, т. е. точка E совпадает с вершиной B). ◁

Ответ: $\frac{21}{25}$ или 5.

24. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 36$ и $BC = 27$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 18. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

Ответ: 7 или 27.

25. Расстояния от точки M, расположенной внутри угла, равного 60°, до сторон угла равны 1 и 2. Найдите радиус окружности, вписанной в этот угол и проходящей через точку M.

Р е ш е н и е. Пусть A — вершина данного угла, B и C — проекции точки M на стороны угла, $BM=1$, $CM=2$, E — точка пересечения прямых AB и CM. Тогда $\angle AEC=30^\circ$.

Из прямоугольных треугольников BME и CAE находим, что

$$ME = 2BM = 2, \quad AC = CE\operatorname{tg}30^\circ = (CM+ME)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = (2+2)\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Пусть O — центр окружности радиуса R, вписанной в угол BAC и проходящей через точку M, P — точка касания окружности с лучом AC. Луч AO — биссектриса угла BAC, поэтому $\angle PAO = 30^\circ$. Тогда $AP=OP\operatorname{ctg}30^\circ=R\sqrt{3}$.

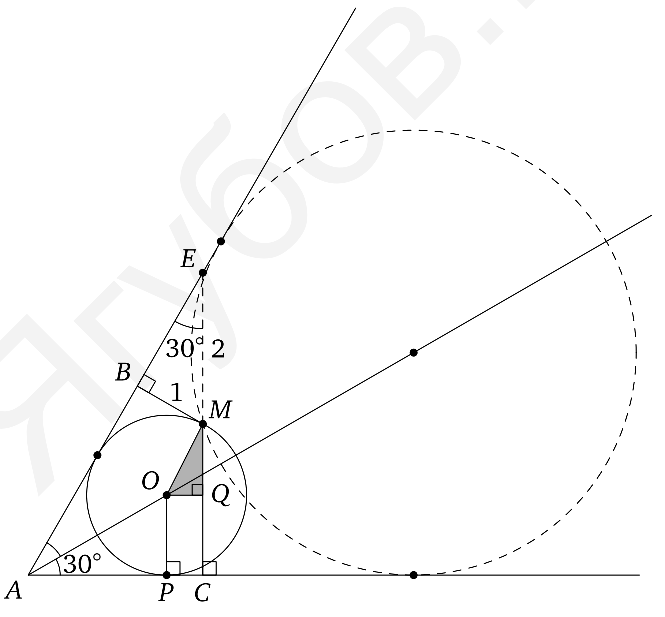


Рис. 27

Рассмотрим прямоугольную трапецию $PCMO$, в которой

$$OM = OP = R, \quad CM = 2, \quad CP = |AC-AP| = \left|\frac{4}{\sqrt{3}} - R\sqrt{3}\right|.$$

Пусть Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на CM. Тогда

$$MQ = |CM - CQ| = |CM - OP| = |2 - R|, \quad OQ = CP = \left|\frac{4}{\sqrt{3}} - R\sqrt{3}\right|.$$

По теореме Пифагора $MQ^2 + OQ^2 = OM^2$, или

$$(2-R)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - R\sqrt{3}\right)^2 = R^2.$$

После очевидных упрощений получим квадратное уравнение $9R^2 - 36R + 28 = 0$, из которого находим, что $R = 2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{2}$. Условию задачи удовлетворяют две окружности. ⊲

Ответ: $2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

26. Расстояния от точки M, расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 1 и 3. Найдите радиус окружности, вписанной в этот угол и проходящей через точку M.

Ответ: $4 \pm \sqrt{6}$.

27. Две стороны треугольника равны 5 и 6, косинус угла между ними равен $\frac{3}{5}$. Найдите сторону квадрата, все вершины которого расположены на сторонах треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB = 6$, $AC = 5$, $\angle BAC = \alpha$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Тогда

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

По теореме косинусов

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos\alpha} = \sqrt{36 + 25 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}} = 5,$$

значит, треугольник ABC — равнобедренный.

Рассмотрим случай, когда сторона $KL = x$ квадрата $KLMN$ расположена на основании AB треугольника ABC (рис. 28), вершина M — на боковой стороне AC, а вершина N — на боковой стороне BC. Пусть высота CH треугольника ABC пересекается со стороной MN квадрата в точке Q. Тогда

$$CH = AC\sin\alpha = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4, \quad CQ = CH - QH = 4 - x.$$

Треугольник CMN подобен треугольнику CAB, поэтому $\frac{CQ}{CH} = \frac{MN}{AB}$, или $\frac{4-x}{4} = \frac{x}{6}$, откуда находим, что $x = \frac{12}{5}$.

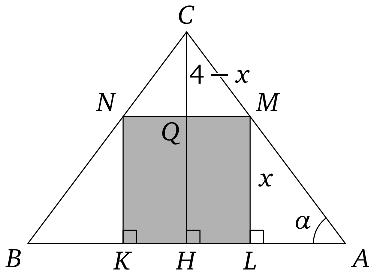


Рис. 28

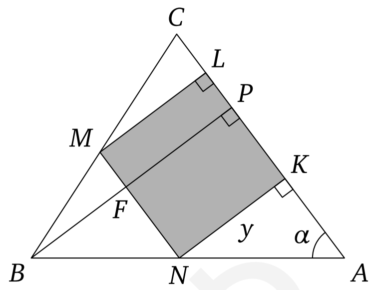


Рис. 29

Пусть теперь сторона $KL = y$ квадрата $KLMN$ расположена на боковой стороне, AC (рис. 29), вершина M — на боковой стороне BC, а вершина N — на основании AB. Пусть высота BP пересекает сторону MN квадрата в точке F. Тогда

$$BP = AB\sin\alpha = 6\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{5}, \quad BF = BP - FP = \frac{24}{5} - y.$$

Треугольник BNM подобен треугольнику BAC, поэтому $\frac{BF}{BP} = \frac{MN}{AC}$, или $\frac{\frac{24}{5} - y}{\frac{24}{5}} = \frac{y}{5}$, откуда находим, что $y = \frac{120}{49}$.

В случае, когда сторона квадрата расположена на боковой стороне BC треугольника ABC, получим тот же результат. ◁

Ответ: $\frac{12}{5}$ или $\frac{120}{49}$.

28. Две стороны треугольника равны 10 и 13, косинус угла между ними равен $\frac{5}{13}$. Найдите сторону квадрата, все вершины которого расположены на сторонах треугольника.

Ответ: $\frac{60}{11}$ или $\frac{1560}{289}$.

29. Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как 1:2. Найдите отношение $CK : KF$.

Р е ш е н и е. Пусть O — центр правильного треугольника $ABCDEF$, S — его площадь. Тогда

$$S_{ABEF} = S_{BCDE} = \frac{1}{2}S, \quad S_{\Delta ABF} = S_{\Delta BCD} = S_{\Delta BOC} = \frac{1}{6}S.$$

Рассмотрим случай, когда точка K расположена между точками O и F (рис. 30). Тогда прямая BK пересекает сторону EF в некоторой

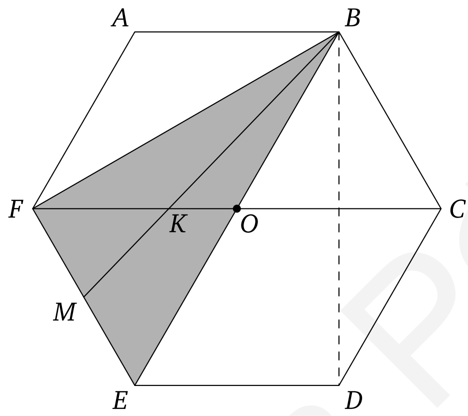


Рис. 30

точке M, причём

$$S_{ABMF} = \frac{1}{3}S, \quad S_{\Delta BMF} = S_{ABMF} - S_{\Delta ABF} = \frac{1}{3}S - \frac{1}{6}S = \frac{1}{6}S,$$

$$S_{\Delta BME} = S_{ABEF} - S_{ABMF} = \frac{1}{2}S - \frac{1}{3}S = \frac{1}{6}S = S_{\Delta BMF}.$$

Треугольники BME и BMF равновелики, поэтому BM — медиана треугольника BEF. Треугольник BKC подобен треугольнику MKF с коэффициентом 2 ($FM \parallel BC$, $BC = EF = 2MF$), следовательно, $\frac{CK}{KF} = 2$.

Пусть теперь точка K лежит между C и O (рис. 31). Тогда прямая BK пересекает сторону DE в некоторой точке N, причём

$$S_{BCDE} = \frac{1}{2}S, \quad S_{BCDN} = \frac{1}{3}S, \quad S_{\Delta BCD} = S_{\Delta ABF} = \frac{1}{6}S,$$

$$S_{\Delta BND} = S_{BCDN} - S_{\Delta BCD} = \frac{1}{3}S - \frac{1}{6}S = \frac{1}{6}S,$$

$$S_{\Delta BNE} = S_{BCDE} - S_{BCDN} = \frac{1}{2}S - \frac{1}{3}S = \frac{1}{6}S = S_{\Delta BND}.$$

Треугольники BNE и BND равновелики, поэтому BN — медиана треугольника BDE.

Пусть диагонали CF и BD пересекаются в точке L. Тогда L — середина OC, OL — средняя линия треугольника BDE, а так как N — сере-

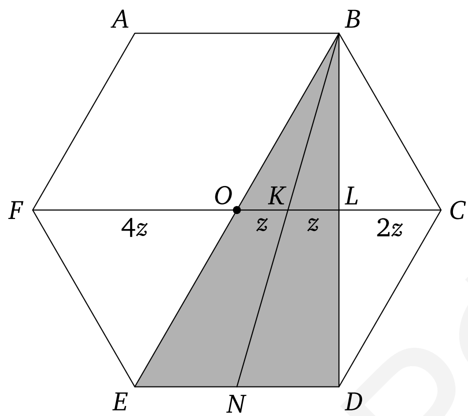


Рис. 31

дина DE, то K — середина OL. Обозначим $OK = z$. Тогда

$$CL = OL = 2z, \quad CK = CL + LK = 2z + z = 3z,$$
$$OF = OC = CK + OK = 3z + z = 4z, \quad KF = OK + OF = z + 4z = 5z.$$

Следовательно, $\frac{CK}{KF} = \frac{3z}{5z} = \frac{3}{5}$. ◁

Ответ: $2:1$ или $3:5$.

30. Через вершину A правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая прямую CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как 1:11. Найдите отношение $CK:KF$.

Ответ: $5:1$ или $1:3$.

31. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C, CH — его высота, BD — медиана. Прямые DH и BC пересекаются в точке E. Окружность, проходящая через точки D и H, касается прямой BC в точке M. Найдите CM, если известно, что $DE = 9$, $DH = 7$ и точка E лежит на луче BC.

Р е ш е н и е. Отрезок HD — медиана прямоугольного треугольника AHC, проведённая из вершины прямого угла, поэтому $CD = HD = 7$.

Из прямоугольного треугольника DCE находим, что

$$CE = \sqrt{DE^2 - CD^2} = \sqrt{9^2 - 7^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

По теореме о касательной и секущей

$$EM^2 = ED \cdot EH = ED(ED + DH) = 9(9+7) = 9 \cdot 16,$$

значит, $EM = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$.

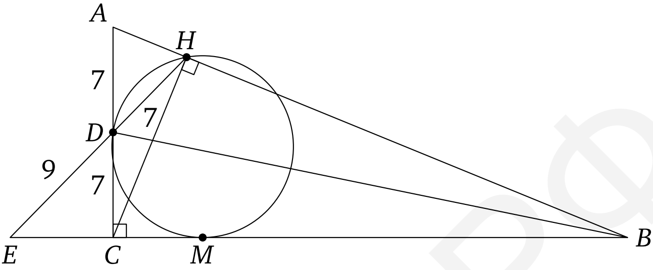


Рис. 32

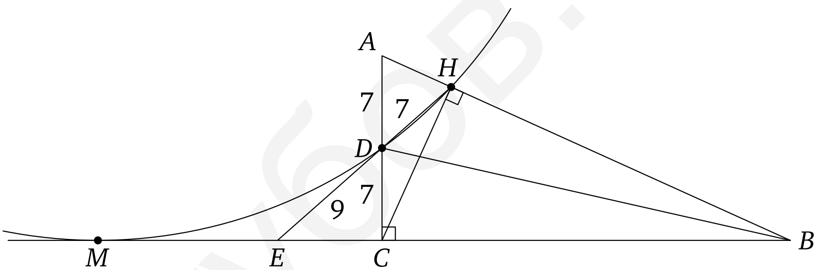


Рис. 33

Если точка C лежит между точками E и M (рис. 32), то

$$CM = EM - EC = 12 - 4\sqrt{2}.$$

Если точка E лежит между C и M (рис. 33), то

$$CM = EM + EC = 12 + 4\sqrt{2}. \qquad \triangleleft$$

Ответ: $12 \pm 4\sqrt{2}$.

32. Дан прямоугольный треугольник KLM с прямым углом при вершине L, LR — его высота, MQ — медиана. Прямые QR и LM пересекаются в точке P, лежащей на луче LM. Окружность, проходящая через точки Q и R, касается прямой LM в точке N. Найдите LN, если известно, что $QR = 9$ и $PQ = 16$.

Ответ: $\sqrt{7}$ или $9\sqrt{7}$.

33. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 63, точка касания вписанной окружности с боковой стороной делит эту сторону в отношении $20:9$, считая от основания. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Пусть AD — высота равнобедренного треугольника ABC, опущенная на его основание BC, O — центр вписанной окружности, P — точка её касания с боковой стороной AB. Положим $AP=9x$, $BP=20x$. Тогда $AB=AP+BP=29x$, $BD=BP=20x$.

По теореме Пифагора $AB^2-BD^2=AD^2$, или

$$(29x)^2-(20x)^2=63^2, \quad 9\cdot 49x^2=7^2\cdot 9^2,$$

откуда $x=3$. Значит,

$$AP=9x=27, \quad BD=20x=60, \quad AB=29x=87.$$

Обозначим $\angle BAD=\alpha$. Из прямоугольного треугольника ABD находим, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{BD}{AD}=\frac{60}{63}=\frac{20}{21}$.

Пусть окружность с центром O_1 и радиусом r_1 касается продолжений боковых сторон AB и AC в точках F и G соответственно (рис. 34),

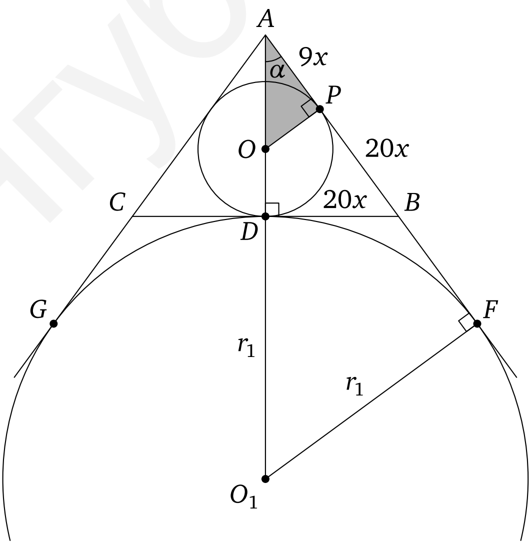


Рис. 34

а также основания BC. Тогда D — точка касания, поэтому

$$BF = BD = 60, \quad AF = AB + BF = AB + BD = 87 + 60 = 147.$$

Следовательно,

$$r_1 = O_1F = AF \operatorname{tg} \alpha = 147 \cdot \frac{20}{21} = 140.$$

Пусть теперь окружность с центром O_2 радиуса r_2 касается боковой стороны AB, продолжения основания BC в точке Q и продолжения боковой стороны AC в точке K (рис. 35). Центр окружности, вписанной

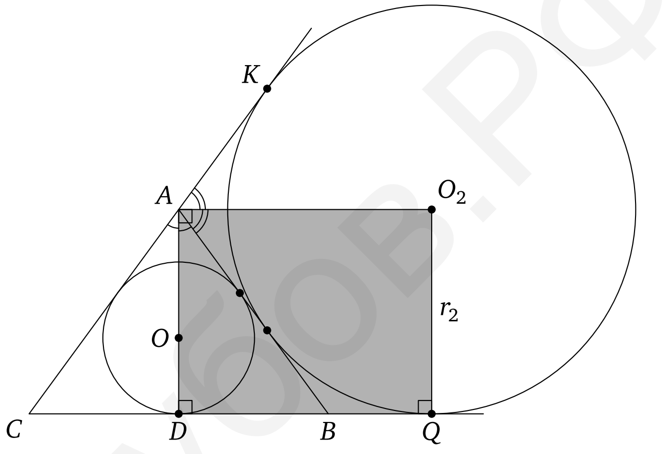


Рис. 35

в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO_2 и AD — биссектрисы смежных углов BAK и DAB, значит, $\angle DAO_2 = 90°$. Тогда $ADQO_2$ — прямоугольник. Следовательно, $r_2 = O_2Q = AD = 63$.

Радиус окружности, касающейся боковой стороны AC и продолжений основания BC и боковой стороны AB, также равен 63.

Второй способ. Пусть S — площадь треугольника ABC, p — его полупериметр. Тогда

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 63 = 3780,$$

$$r_1 = \frac{S}{p - BC} = \frac{3780}{147 - 120} = \frac{3870}{27} = 140,$$

$$r_2 = \frac{3780}{147 - 87} = \frac{3780}{60} = 63. \qquad \triangleleft$$

Ответ: 140 или 63.

34. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 45, точка касания вписанной окружности с боковой стороной делит эту сторону в отношении 8 : 9, считая от основания. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

Ответ: 40 или 45.

35. Расстояние между параллельными прямыми равно $\frac{48}{5}$. На одной из них лежит точка C, на другой — точки A и B, причём треугольник ABC — равнобедренный. Известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен $\frac{8}{3}$. Найдите AB.

Р е ш е н и е. Заметим, что либо $AC = BC$, либо $AC = AB$.

Рассмотрим первый из этих случаев (рис. 36). Пусть M и H — точки касания вписанной окружности треугольника ABC с боковой стороной AC и основанием AB соответственно, O — центр вписанной

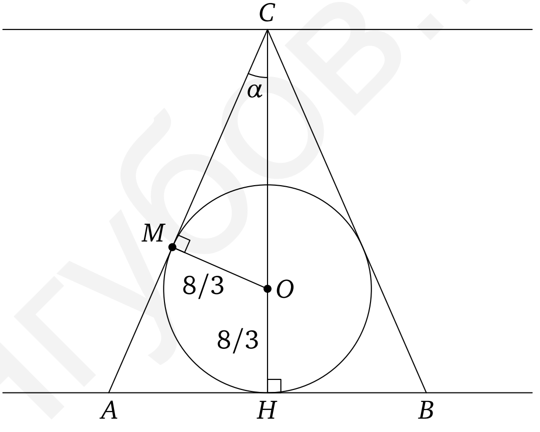


Рис. 36

окружности. Тогда CH — высота, медиана и биссектриса треугольника ABC. Обозначим $\angle ACH = \alpha$. В прямоугольном треугольнике COM известно, что

$$OM = \frac{8}{3}, \quad OC = CH - OH = \frac{48}{5} - \frac{8}{3} = \frac{8 \cdot 13}{15}, \quad \sin\alpha = \frac{OM}{OC} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{8\cdot 13}{15}} = \frac{5}{13}.$$

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{12}{13}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}, \quad AH = CH \operatorname{tg}\alpha = \frac{48}{5} \cdot \frac{5}{12} = 4.$$

Следовательно, $AB = 2AH = 8$.

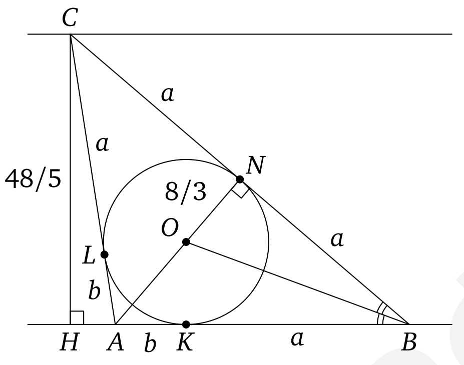


Рис. 37

Рассмотрим второй случай (рис. 37). Пусть K, L и N — точки касания вписанной окружности равнобедренного треугольника ABC с боковыми сторонами AB, AC и основанием BC соответственно, $CH = \frac{48}{5}$ — высота треугольника ABC, $OK = OL = ON = r = \frac{8}{3}$ — радиус его вписанной окружности. Обозначим $BK = BN = CN = CL = a$, $AK = AL = b$. Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{24}{5}(a+b), \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB+AC+BC)\cdot r = \frac{8}{3}(2a+b).$$

Из равенства $\frac{24}{5}(a+b) = \frac{8}{3}(2a+b)$ получаем, что $a = 4b$. Тогда $BN = a = 4b$, $AB = a + b = 5b$, а так как BO — биссектриса треугольника ANB, то

$$\frac{AO}{ON} = \frac{AB}{BN} = \frac{5b}{4b} = \frac{5}{4},$$

значит, $AN = \frac{9}{4} ON = \frac{9}{4} \cdot \frac{8}{3} = 6$. По теореме Пифагора $AB^2 - BN^2 = AN^2$, или $25b^2 - 16b^2 = 36$, откуда находим, что $b = 2$. Следовательно, $AB = 5b = 10$.

(Заметим, что во втором случае треугольник ABC — тупоугольный, так как $AN < BN$). ◁

Ответ: 8 или 10.

36. Расстояние между параллельными прямыми равно 24. На одной из них лежит точка C, на другой — точки A и B, причём треугольник ABC — равнобедренный и остроугольный, а его боковая сторона равна 25. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Ответ: $\frac{21}{4}$ или $\frac{15}{2}$.

37. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K. Известно, что $\angle BAC + \angle AKC = 90°$.

а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если известно также, что $\cos\angle BAC = \frac{3}{5}$ и $BC = 48$.

Р е ш е н и е. а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$ (рис. 38). Тогда

$$\angle OKC = \angle AKC = 90° - \alpha.$$

Поскольку BOC — центральный угол окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, а угол BAC — вписанный, получаем, что $\angle BOC = 2\alpha$. Из равнобедренного треугольника BOC находим, что $\angle OBC = 90° - \alpha$.

Из точек B и K, лежащих по одну сторону от прямой OC, отрезок OC виден под одним и тем же углом $90° - \alpha$. Значит, точки O, B, K и C лежат на одной окружности. Следовательно, четырёхугольник $OBKC$ вписанный.

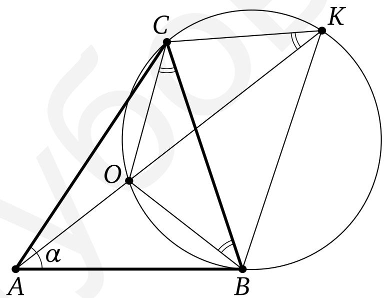


Рис. 38

б) Поскольку $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, получаем, что $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, а так как OC — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, по теореме синусов находим

$$OC = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{48}{2\sin\alpha} = \frac{24}{\frac{4}{5}} = 30.$$

Пусть R — искомый радиус описанной окружности четырёхугольника $OBKC$. Применяя теорему синусов к треугольнику OCK, находим, что

$$R = \frac{OC}{2\sin\angle OKC} = \frac{OC}{2\sin(90° - \alpha)} = \frac{OC}{2\cos\alpha} = \frac{30}{2\cdot\frac{3}{5}} = 25. \qquad \triangleleft$$

Ответ: 25.

38. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$.

а) Докажите, что $\angle OBK + \angle OCK = 180^\circ$.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если $\cos\angle BAC = \frac{5}{13}$, а $BC = 120$.

Ответ: 84,5.

39. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC, если $AH = 21$ и $\angle BAC = 30^\circ$.

Р е ш е н и е. а) Высоты треугольника пересекаются в одной точке, поэтому точка H лежит на высоте, проведённой из вершины A (рис. 39). Значит, $AH \perp CB$, а так как $HB_1 \perp CA$, получаем, что углы AHB_1 и ACB равны как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами.

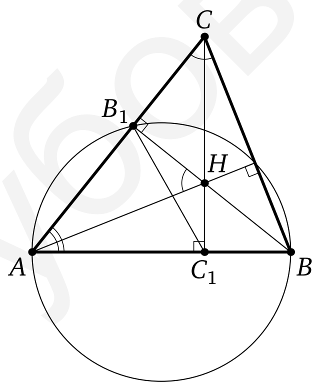


Рис. 39

б) Из точек B_1 и C_1 отрезок AH виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром AH. По теореме синусов

$$B_1C_1 = AH\sin\angle B_1AC_1 = 21\sin 30^\circ = \frac{21}{2}.$$

Треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\cos\angle BAC = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

$$BC = \frac{B_1C_1}{\cos\angle BAC} = \frac{2B_1C_1}{\sqrt{3}} = \frac{21}{\sqrt{3}} = 7\sqrt{3}. \qquad \triangleleft$$

Ответ: $7\sqrt{3}$.

40. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH=2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4.

Ответ: $1:15$.

41. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB=4$, $BC=8$ и $AC=10$.

Решение. а) Обозначим $S_{\Delta ABC}=S$. Тогда площадь каждого из треугольников, на которые медианы разбивают треугольник ABC, равна $\frac{1}{6}S$. Заметим, что C_1A_2 — медиана треугольника AC_1M (рис. 40), поэтому

$$S_{\Delta A_2MC_1}=\frac{1}{2}S_{\Delta AMC_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{12}S.$$

Аналогично для остальных пяти треугольников, составляющих шестиугольник $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$. Следовательно, площадь этого шестиугольника равна $6\cdot\frac{1}{12}S=\frac{1}{2}S$.

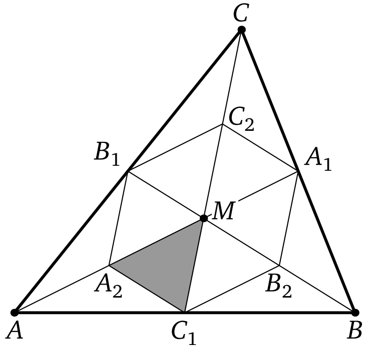


Рис. 40

б) Обозначим $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. По формуле для квадрата медианы находим, что

$$AA_1^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2),\quad BB_1^2=\frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2),$$
$$CC_1^2=\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2).$$

Медианы треугольника делятся их точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины, поэтому

$$AM=\frac{2}{3}AA_1,\quad BM=\frac{2}{3}BB_1,\quad CM=\frac{2}{3}CC_1.$$

Стороны A_2B_1 и A_1B_2 — средние линии треугольников AMC и BMC, поэтому $A_2B_1=A_1B_2=\frac{1}{2}CM$,

$$A_2B_1^2=A_1B_2^2=\frac{1}{4}CM^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}CC_1=\frac{1}{36}(2a^2+2b^2-c^2).$$

Аналогично

$$C_2A_1^2=C_1A_2^2=\frac{1}{36}(2a^2+2c^2-b^2),\quad B_2C_1^2=B_1C_2^2=\frac{1}{36}(2b^2+2c^2-a^2).$$

Следовательно, сумма квадратов всех сторон шестиугольника равна

$$2A_2B_1^2+2C_2A_1^2+2B_2C_1^2=$$
$$=\frac{1}{18}(2a^2+2b^2-c^2+2a^2+2c^2-b^2+2b^2+2c^2-a^2)=$$
$$=\frac{1}{18}(3a^2+3b^2+3c^2)=\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)=\frac{1}{6}(64+100+16)=\frac{180}{6}=30.\quad\triangleleft$$

Ответ: 30.

42. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB=4$, $BC=7$ и $AC=8$.

Ответ: $\frac{43}{2}$.

43. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Р е ш е н и е. а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно (рис. 41). Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный. Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

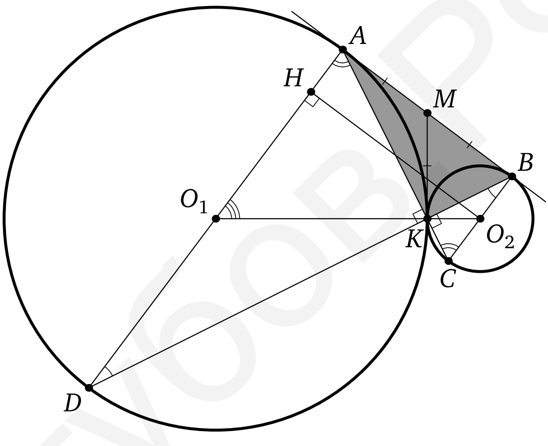


Рис. 41

б) Пусть радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 равны 4 и 1 соответственно. Линия центров касающихся окружностей проходит через точку касания, поэтому

$$O_1O_2 = O_1K + KO_2 = 4 + 1 = 5.$$

Опустим перпендикуляр O_2H из центра второй окружности на диаметр AD первой. Из прямоугольного треугольника O_2HO_1 находим, что

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \sqrt{(1+4)^2 - (4-1)^2} = \sqrt{25-9} = 4,$$

а так как ABO_2H — прямоугольник, получаем, что $AB = O_2H = 4$. Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4.$$

Треугольники AKD и BKC подобны, поэтому $\frac{AK}{KC}=\frac{AD}{BC}=4$. Значит, $\frac{AK}{AC}=\frac{4}{5}$. Следовательно,

$$S_{\Delta AKB}=\frac{AK}{AC}S_{\Delta ABC}=\frac{4}{5}\cdot 4=3{,}2. \qquad \triangleleft$$

Ответ: 3,2.

44. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C. К окружностям проведены общая внешняя касательная AB (A и B — точки касания).

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AC=10$ и $BC=24$.

Ответ: $\frac{65}{12}$, $\frac{156}{5}$.

45. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB=7$, $BC=24$, $CD=15$, $AD=20$ и $AC=25$.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписанный.

б) Найдите косинус угла между его диагоналями.

Р е ш е н и е. а) Поскольку

$$AC^2=25^2=7^2+24^2=AB^2+BC^2 \quad \text{и} \quad AC^2=25^2=15^2+20^2=CD^2+AD^2,$$

треугольники ABC и ACD прямоугольные с прямыми углами при вершинах B и D (рис. 42). Из точек B и D отрезок AC виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром AC. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ вписанный.

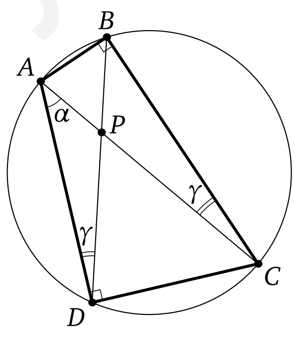


Рис. 42

б) Обозначим $\angle CAD=\alpha$, $\angle ACB=\gamma$. Вписанные углы ADB и ACB опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle ADB=\angle ACB=\gamma$. Из прямоугольных треугольников ACD и ABC находим, что

$$\cos\alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}, \quad \sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos\gamma = \frac{BC}{AC} = \frac{24}{25}, \quad \sin\gamma = \frac{7}{25}.$$

Пусть диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle CPD = \angle PAD + \angle ADP = \alpha + \gamma,$$

следовательно,

$$\cos\angle CPD = \cos(\alpha+\gamma) = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma = \frac{4}{5}\cdot\frac{24}{25} - \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{25} = \frac{3}{5}. \ \triangleleft$$

Ответ: $\frac{3}{5}$.

46. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB=2$, $BC=21$, $CD=18$, $AD=11$ и $AC=\sqrt{445}$.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписанный.

б) Найдите угол между его диагоналями.

Ответ: $\arccos\frac{39}{89}$.

47. На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB=12$, $CH=5$.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* а) Предположим для определённости, что точка E лежит на катете BC, а точка K — на катете AC (рис. 43). Обозначим $\angle BAC=\alpha$. Тогда

$$\angle HKE = \angle HCE = \angle BAC = \alpha,$$
$$\angle AKE = \angle AKH + \angle HKE = 90^\circ + \alpha,$$

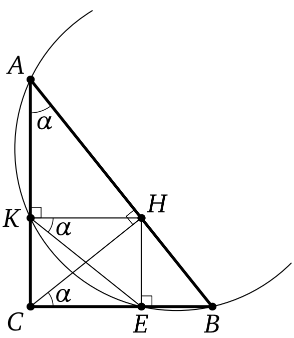


Рис. 43

а так как $\angle ABC = 90^\circ - \alpha$, получаем, что

$$\angle AKE + \angle ABE = \angle AKE + \angle ABC = 90^\circ + \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ.$$

Значит, четырёхугольник $ABEK$ вписанный. Следовательно, точки A, B, K и E лежат на одной окружности, что и требовалось доказать.

б) Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $CH = h$. Тогда $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

Поскольку $\angle CEK = \angle CHK = \alpha$, прямоугольный треугольник ECK подобен прямоугольному треугольнику ACB по двум углам. Поэтому $\frac{CK}{BC} = \frac{KE}{AB}$, а так как $CKHE$ — прямоугольник, имеем $KE = CH$, значит,

$$CK = \frac{KE \cdot BC}{AB} = \frac{CH \cdot BC}{AB} = \frac{ah}{c},$$

$$BK = \sqrt{CK^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{a^2h^2}{c^2} + a^2} = \frac{a\sqrt{h^2+c^2}}{c}.$$

Пусть R — радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABEK$. По теореме синусов из треугольника ABK находим, что

$$R = \frac{BK}{2\sin\angle BAK} = \frac{\frac{a\sqrt{h^2+c^2}}{c}}{2\cdot\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt{h^2+c^2}}{2} = \frac{\sqrt{5^2+12^2}}{2} = \frac{13}{2}.$$

Второй способ. б) Пусть P, Q и M — середины сторон соответственно AK (рис. 44), BE и AB четырёхугольника $ABEK$. Центр O окружности радиуса R, описанной около четырёхугольника $ABEK$, есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам AK, BE и AB этого четырёхугольника.

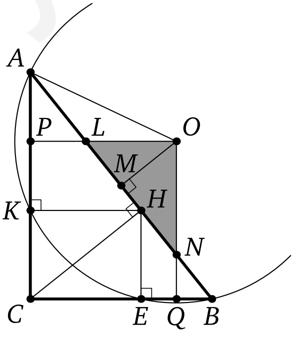


Рис. 44

Пусть L и N — точки пересечения отрезков OP и OQ с гипотенузой AB. Тогда PL и QN — средние линии треугольников AKH и BEH, значит, L и N — середины отрезков AH и BH. Поэтому

$$LN = LH + HN = \frac{1}{2}AH + \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}AB = 6.$$

Следовательно, прямоугольный треугольник NLO подобен прямоугольному треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Тогда высота OM треугольника NLO вдвое меньше высоты CH треугольника ABC, т. е. $OM = \frac{5}{2}$.

Из прямоугольного треугольника AOM находим, что

$$R = \sqrt{AM^2 + OM^2} = \sqrt{36 + \frac{25}{4}} = \frac{13}{2}. \qquad \triangleleft$$

Ответ: $\frac{13}{2}$.

48. На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 24$, $CH = 7$.

Ответ: $\frac{25}{2}$.

49. На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.

а) Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.

б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 16, а один из его углов равен 60°.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* а) Возьмём на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ точку O, отличную от середины AC, и проведём через неё перпендикуляры NL и KM к сторонам параллелограмма (рис. 45).

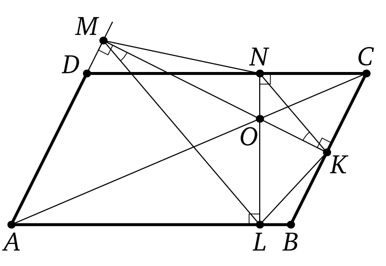


Рис. 45

Прямоугольные треугольники CKO и AMO подобны. Точно так же подобны треугольники CNO и ALO. Имеем $OK : OM = OC : OA = ON : OL$. Отсюда следует подобие треугольников ONK и OLM. Тогда накрест лежащие углы OML и OKN равны, а поэтому прямые NK и ML параллельны. Следовательно, четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм или трапеция.

Докажем, что это трапеция. Если $KLMN$ — параллелограмм, то $ON = OL$. В этом случае $OC = OA$, т. е. O — середина AC. Противоречие. Значит, $KLMN$ — трапеция.

б) Обозначим площадь параллелограмма S, а его острый угол — α. Угол между диагоналями NL и KM трапеции $KLMN$ равен углу между перпендикулярными диагоналям прямыми BC и CD, т. е. этот угол равен α. Поэтому площадь трапеции равна:

$$\frac{1}{2}NL \cdot KM \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{AB} \cdot \frac{S}{AD} \sin\alpha = \frac{S \cdot AD \cdot AB \sin^2\alpha}{2AD \cdot AB} = \frac{S\sin^2\alpha}{2}.$$

Подставляя $\alpha = 60^\circ$ и $S = 16$, получаем, что площадь трапеции равна

$$\frac{16\sin^2 60^\circ}{2} = \frac{16 \cdot 3}{8} = 6.$$

Второй способ. а) Из точек M и L отрезок AO виден под прямым углом (рис. 46), значит, эти точки лежат на окружности с диаметром OA. Вписанные в эту окружность углы LMO и LAO опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle LMO = \angle LAO$.

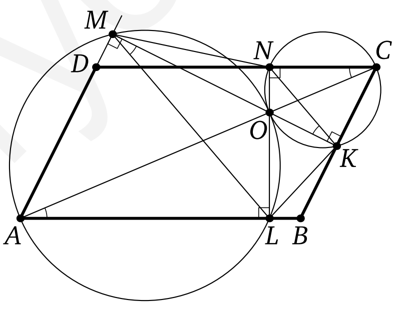


Рис. 46

Аналогично докажем, что $\angle NCO = \angle NKO$, а так как $\angle NCO = \angle LAO$, получаем, что $\angle NKO = \angle LMO$. Следовательно, $NK \parallel ML$.

Если $KLMN$ — параллелограмм, то $ON = OL$ и $OC = OA$, значит, O — середина AC. Противоречие. Следовательно, $KLMN$ — трапеция. ◁

Ответ: 6.

50. Из точки M, лежащей на диагонали параллелограмма $ABCD$, опустили перпендикуляры MK, MP, ML и MQ на стороны соответственно AB, BC, CD и AD (или их продолжения).

а) Докажите, что треугольники KMP и LMQ равновелики.

б) Найдите площадь параллелограмма, если один из его углов равен 30°, а площадь четырёхугольника $KPLQ$ равна 5.

Ответ: 40.

51. К двум равным непересекающимся окружностям проведены две параллельные общие касательные. Окружности касаются одной из этих прямых в точках A и B. Через точку C, лежащую на отрезке AB, проведены касательные к этим окружностям, пересекающие вторую прямую в точках D и E, причём отрезки CA и CD касаются одной окружности, а отрезки CB и CE — другой.

а) Докажите, что периметр треугольника CDE вдвое больше расстояния между центрами окружностей.

б) Найдите DE, если известно, что радиусы окружностей равны 6, расстояние между их центрами равно 20, а $AC = 8$.

Р е ш е н и е. а) Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиуса R; касательная, проведённая из точки C к окружности с центром O_1, и луч CO_1 пересекают вторую прямую в точках D и D_1 соответственно (рис. 47); касательная, проведённая из точки C к окружности с центром O_2, и луч CO_2 пересекают вторую прямую в точках E и E_1 соответственно.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому $\angle DCD_1 = \angle ACD_1 = \angle CD_1D$, треугольник CDD_1 равнобедренный, $CD = DD_1$. Аналогично $CE = EE_1$. Следовательно, периметр P треугольника CDE равен сумме отрезков DD_1, DE и EE_1, т. е. $P = D_1E_1$.

Кроме того, биссектриса DO_1 равнобедренного треугольника CDD_1 является его медианой, значит, O_1 — середина CD_1. Аналогично O_2 — середина CE_1, значит, O_1O_2 — средняя линия треугольника CD_1E_1. Следовательно, $P = D_1E_1 = 2OO_1$, что и требовалось доказать.

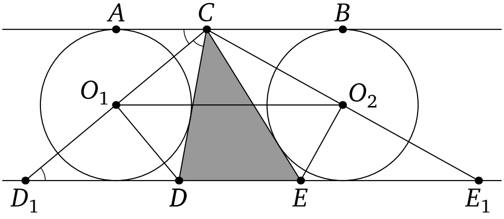


Рис. 47

б) Пусть окружность с центром O_1 касается отрезка CD в точке K, а прямой DE — в точке M; окружность с центром O_2 касается отрезка CE в точке L, а прямой DE — в точке N. Тогда O_1K — высота прямоугольного треугольника CO_1D, проведённая из вершины прямого угла, поэтому

$$DM = DK = \frac{O_1K^2}{CK} = \frac{R^2}{AC} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2},$$

а так как

$$CL = CB = AB - AC = 20 - 8 = 12,$$

аналогично получаем $EN = EL = \frac{36}{12} = 3$. Поскольку $ABNM$ — прямоугольник, $MN = AB = 20$, следовательно,

$$DE = MN - DM - EN = AB - DM - EN = 20 - \frac{9}{2} - 3 = \frac{25}{2}. \qquad \triangleleft$$

Ответ: 12,5.

52. К двум непересекающимся окружностям равных радиусов проведены две параллельные общие касательные. Окружности касаются одной из этих прямых в точках A и B. Через точку C, лежащую на отрезке AB, проведены касательные к этим окружностям, пересекающие вторую прямую в точках D и E, причём отрезки CA и CD касаются одной окружности, а отрезки CB и CE — другой.

а) Докажите, что периметр треугольника CDE вдвое больше расстояния между центрами окружностей.

б) Найдите DE, если радиусы окружностей равны 5, расстояние между их центрами равно 18, а $AC = 8$.

Ответ: 12,375.

53. В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM, пересекает сторону AC в точке N; $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$.

а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите отношение $AP : PN$.

Р е ш е н и е. а) По теореме о биссектрисе треугольника

$$\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

а так как $BC = 5$, получаем, что $BM = 2$ и $CM = 3$ (рис. 48).

В треугольнике BAN биссектриса угла BAN перпендикулярна стороне BN, значит, этот треугольник равнобедренный. Поэтому $AN = AB = 6$, а

$$CN = AC - AN = 9 - 6 = 3 = CM.$$

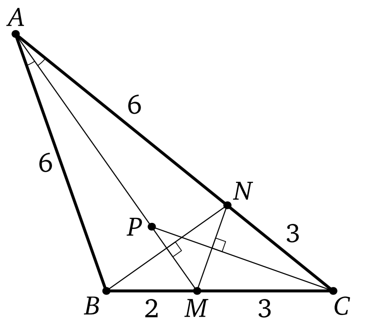


Рис. 48

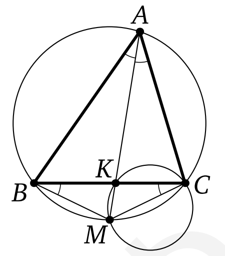


Рис. 49

В равнобедренном треугольнике CMN биссектриса, проведённая из вершины C, является медианой, следовательно, она делит основание MN пополам.

б) CP — биссектриса треугольника ACM, поэтому

$$\frac{AP}{PM} = \frac{AC}{CM} = \frac{9}{3} = 3.$$

Прямая CP — серединный перпендикуляр к отрезку MN, поэтому $PN = PM$. Следовательно,

$$\frac{AP}{PN} = \frac{AP}{PM} = 3. \qquad \triangleleft$$

Ответ: 3.

54. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке K, а окружность, описанную около треугольника ABC, — в точке M.

а) Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KMC, если известно, что $AC = 4$, $BC = 5$, $AB = 6$.

Р е ш е н и е. а) Вписанные углы BAM и BCM опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle BCM = \angle BAM$ (рис. 49). Аналогично $\angle CBM = \angle CAM$, а так как $\angle BAM = \angle CAM$, получаем, что $\angle BCM = \angle CBM$. Следовательно, треугольник BCM равнобедренный.

б) По теореме о биссектрисе треугольника

$$\frac{BK}{CK} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2},$$

а так как $BK + CK = BC = 5$, получаем, что $BK = 3$ и $CK = 2$.

Обозначим $\angle ABC = \beta$. Вписанные углы AMC и ABC опираются на одну и ту же дугу, поэтому

$$\angle KMC = \angle AMC = \angle ABC = \beta.$$

По теореме косинусов

$$\cos\beta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{36 + 25 - 16}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{3}{4}.$$

Значит, $\sin\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника KMC. По теореме синусов

$$R = \frac{CK}{2\sin\angle KMC} = \frac{2}{2\sin\beta} = \frac{4}{\sqrt{7}}. \qquad \triangleleft$$

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{7}}$.

55. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке K, а окружность, описанную около треугольника ABC, — в точке M.

а) Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KMC, если известно, что $AC = 10$, $BC = 11$ и $AB = 12$.

Ответ: $\frac{20\sqrt{39}}{39}$.

Приложение 2. Список полезных фактов

1. а) Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

б) Биссектрисы внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

2. а) Если биссектрисы, проведённые из вершин B и C треугольника ABC, пересекаются в точке O, то $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$.

б) Если биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке Q, то $\angle BQC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$.

3. а) Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

б) Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

4. а) Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

б) Если сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

5. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

6. Свойства окружности.

а) Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам.

б) Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.

в) Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

г) Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

д) Хорды окружности, удалённые от центра на равные расстояния, равны.

е) Окружность симметрична относительно центра и относительно любого своего диаметра.

ж) Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны.

7. а) *Замечательное свойство окружности.* Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90^\circ$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B.

б) Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90^\circ$), есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB.

в) Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90^\circ$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB.

г) Геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей с общей хордой AB, лежащие по разные стороны от прямой AB, без точек A и B.

8. а) Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам.

б) Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку касания.

9. а) Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c, равен $\frac{a+b-c}{2}$.

б) Если M — точка касания со стороной AC окружности, вписанной в треугольник ABC, то $AM = p - BC$, где p — полупериметр треугольника.

в) Если окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC, то расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC.

г) Если окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, L и M, а $\angle BAC = \alpha$, то $\angle KLM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

д) Если прямые, проходящие через точку A, касаются окружности S в точках B и C, то центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на окружности S.

е) Если расстояние между центрами окружностей радиусов r и R равно a и $a > R + r$, то отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключённые между точками касания, равны соответственно

$$\sqrt{a^2-(R-r)^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{a^2-(R+r)^2}.$$

10. Если окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K, а прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K, в точке C, то $\angle AKB = 90^\circ$ и $\angle O_1CO_2 = 90^\circ$, а отрезок AB общей внешней касательной окружностей равен отрезку общей внутренней касательной, заключённому между общими внешними. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

11. а) Угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними.

б) Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

в) Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

12. а) Если прямая, проходящая через точку A и центр O вписанной окружности треугольника ABC, вторично пересекает описанную окружность этого треугольника в точке M, то треугольники BOM и COM равнобедренные.

б) *Формула Эйлера*. Если O_1, O_2 — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC, а r и R — радиусы этих окружностей, то $O_1O_2 = \sqrt{R^2 - 2rR}$.

13. а) Если четырёхугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.

б) Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

14. а) Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

б) Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

15. а) Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

б) Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то боковая сторона трапеции равна её средней линии.

в) Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное (среднее геометрическое) отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

16. а) *Замечательное свойство трапеции.* Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

б) Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключённый внутри трапеции, разбивается её диагоналями на три части. Тогда отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны.

в) Если через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами трапеции, равен $\dfrac{2ab}{a+b}$.

г) Если трапеция разделена прямой, параллельной её основаниям, равным a и b, на две равновеликие трапеции, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, равен $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

д) Если трапеция разделена прямой, параллельной её основаниям, равным a и b, на две подобные трапеции, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, равен $\sqrt{ab}$.

17. а) Если BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, то треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC, причём коэффициент подобия равен $|\cos\angle A|$.

б) Если H — точка пересечения высот треугольника ABC, а O — центр его описанной окружности, то отрезок AH вдвое больше расстояния от точки O до середины стороны BC.

в) Точки O, H и точка M пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причём точка M лежит на отрезке OH и $OM:MH=1:2$.

г) Если BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, а O — центр описанной окружности, то $OA\perp B_1C_1$.

д) Точки, симметричные точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника ABC относительно прямых AB, AC и BC, лежат на описанной окружности треугольника ABC.

е) Точки, симметричные точке пересечения высот треугольника ABC относительно середин его сторон, лежат на описанной окружности треугольника ABC.

ж) Если AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, то биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ (ортотреугольника треугольника ABC) лежат на прямых AA_1, BB_1 и CC_1. Если же треугольник ABC тупоугольный, то на этих прямых лежат биссектрисы двух внешних и третьего внутреннего углов треугольника $A_1B_1C_1$.

18. а) Произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.

б) *Теорема о касательной и секущей и следствие из неё.* Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.

Произведение всей секущей на её внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно.

в) Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

г) Общие хорды (или их продолжения) трёх попарно пересекающихся окружностей проходят через одну точку либо параллельны.

19. *Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике.* Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное (среднее геометрическое) проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

20. а) *Следствие из теоремы косинусов.* Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

б) *Формула для медианы треугольника.* Если m_c — медиана треугольника, проведённая к стороне c, то $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где a и b — остальные стороны треугольника.

21. *Формулы для биссектрисы треугольника.* Если a и b — стороны треугольника, γ — угол между ними, l — биссектриса треугольника, проведённая из вершины этого угла, а a' и b' — отрезки, на которые биссектриса делит третью сторону треугольника, то

$$l = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}, \quad l^2 = ab - a'b'.$$

22. *Формулы для площади треугольника.* Если a, b и c — стороны треугольника, α, β и γ — противолежащие им углы, h_a, h_b и h_c — высоты, проведённые из вершин этих углов, p — полупериметр треугольника, R — радиус описанной окружности, r, r_a, r_b и r_c — радиусы вписанной и вневписанных окружностей, касающихся сторон a, b и c соответственно, а S — площадь треугольника, то

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \quad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = pr, \quad S = (p-a)r_a,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(формула Герона)},$$

$$S = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, \quad S = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}, \quad S = \frac{h_b h_c}{2\sin\alpha}, \quad S = \sqrt{rr_ar_br_c}.$$

23. а) Площадь четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями равна половине произведения диагоналей.

б) Площадь любого четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

24. а) Медиана разбивает треугольник на два равновеликих.

б) Три медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих.

в) Если площадь треугольника равна S, то площадь треугольника, составленного из его медиан, равна $\frac{3}{4}S$.

г) Если точка D лежит на стороне BC треугольника ABC или на её продолжении, то $\frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{BD}{DC}$.

д) Если точки P и Q лежат на сторонах AB и AC или на их продолжениях, то $\dfrac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{AP}{AB} \cdot \dfrac{AQ}{AC}$.

25. а) Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, причём площадь параллелограмма вдвое меньше площади четырёхугольника.

б) Середины двух противоположных сторон любого четырёхугольника и середины его диагоналей либо являются вершинами параллелограмма, либо лежат на одной прямой.

26. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны.

27. Если диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность радиуса R с центром O, пересекаются в точке P и перпендикулярны, то

а) расстояние от точки O до стороны AB вдвое меньше стороны CD;

б) медиана PM треугольника APD перпендикулярна стороне BC;

в) $AB^2+CD^2+AD^2+BC^2=8R^2$, $\quad PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=4R^2$;

г) площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $\dfrac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$, причём для любого другого четырёхугольника $ABCD$ с теми же сторонами площадь меньше, чем $\dfrac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$.

28. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Если AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T, то MT — биссектриса угла AMB.

29. Если вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N, а P — точка пересечения прямой MN с биссектрисой угла B, то $\angle BPC = 90^\circ$.

30. *Окружность Аполлония*. Геометрическое место точек, расстояния от каждой из которых до двух данных точек относятся как $m:n$ $(m \neq n)$, есть окружность.

31. *Теорема Птолемея*. Сумма произведений противоположных сторон вписанного четырёхугольника равна произведению его диагоналей.

32. *Теорема Менелая*. Дан треугольник ABC. Некоторая прямая пересекает его стороны AB, BC и AC (или их продолжения) в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

33. *Теорема Чевы*. Пусть точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат сторонам (или их продолжениям) соответственно BC, AC и AB треугольника ABC. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

Литература

1. *Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Позняк Э. Г., Юдина И. И.* Геометрия. Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2009.
2. *Гордин Р. К.* Геометрия. Планиметрия. 7—9 классы. М.: МЦНМО, 2008.
3. *Гордин Р. К.* Это должен знать каждый матшкольник. М.: МЦНМО, 2008.
4. *Погорелов А. В.* Геометрия 7—9. М.: Просвещение, 2009.
5. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2007.
6. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Под ред. М. И. Сканави. М.: ОНИКС 21 век, АЛЬЯНС-В, 2000.
7. *Сергеев И. Н.* Математика. Задачи с ответами и решениями: Пособие для поступающих в вузы. М.: КДУ, 2004.
8. *Смирнов В. А., Смирнова И. М.* Геометрия 7—9. М.: Мнемозина, 2009.
9. *Смирнов В. А., Смирнова И. М.* Геометрия 10—11. Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2009.
10. *Ткачук В. В.* Математика — абитуриенту. М.: МЦНМО, 2008.
11. *Шарыгин И. Ф.* Факультативный курс по математике. Решение задач. М.: Просвещение, 1989.
12. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. М.: Наука, 1986. (Библиотечка «Квант»; вып. 17).

Ответы и указания

Диагностическая работа

1. $\frac{c}{2}$, $\frac{c}{2}\cdot\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$, $\frac{c}{2}\cdot\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$. **2.** $\frac{1}{2}$. **3.** $\sqrt{21}$. **4.** 37,2. **5.** $2\sqrt{3}$. **6.** $\frac{1}{4}$. **7.** 60. **8.** $2R$. **9.** 45°. **10.** $\frac{12}{5}$. **11.** 16,9; 2,4; 14,3. **12.** $\frac{4}{3}R^2\sqrt{2}$. **13.** 150° и 210°. **14.** $\frac{ab}{c}$. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 1. Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

1.1. 2. **1.2.** $2m$, m, $m\sqrt{3}$. **1.3.** 3; 4; 5. **1.4.** $\frac{4}{5}$. **1.5.** 30°, 60°. **1.6.** 30°, 60°. **1.7.** $\frac{b^2(b^2-a^2)}{a^2+b^2}$. **1.8.** $\frac{4}{\sqrt{17}}$. **1.9.** $\frac{a\sqrt{2(1\pm\sin\alpha)}}{\cos\alpha}=\frac{a}{\sin\left(45^\circ\pm\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Тренировочные задачи

1.10. $\sqrt{2mn}-m$, $\sqrt{2mn}-n$, $n+m-\sqrt{2mn}$. **1.11.** $5\sqrt{2}$. **1.12.** $\frac{5\sqrt{13}}{12}$. **1.13.** $2\sqrt{\frac{22-12\sqrt{3}}{3}}$. **1.14.** $\frac{3\sqrt{6}-2}{4}$. *Указание.* Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на сторону BC. Тогда точки M, P и H лежат на одной прямой, а треугольник PHC подобен треугольнику APD. **1.15.** 8; 2; 3. *Указание.* Если сумма углов при основании трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований. **1.16.** 5; 3. **1.17.** $9\sqrt{5}$. **1.18.** $\frac{1}{2}(1+2\cos 2\alpha)^2\operatorname{tg}2\alpha$. *Указание.* Пусть M — середина DE. Тогда $BEMF$ — ромб, а CF — биссектриса угла MCE. **1.19.** 40. *Указание.* Опустите перпендикуляр из центра окружности на хорду AB и соедините его основание с точкой C. **1.20.** 30°, 60°. **1.21.** $\frac{2bc}{b+c}$. *Указание.* Соедините точку D с серединой отрезка AE. **1.22.** 90°, 30°, 60°. *Указание.* Точки B, C, D, K и точка пересечения прямых AB и DE лежат на окружности с диаметром BD. **1.23.** $15\sqrt{3}$. **1.24*.** 75°. *Указание.* Пусть K — середина CM, а O — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на BC. Тогда $\angle AOK=90^\circ$, а O — центр описанной окружности треугольника AMB. **1.25*.** $\frac{25\sqrt{7}}{12}a^2$. *Указание.* Пусть T — середина BF. Тогда $DT=DC$. **1.26*.** 110°. *Указание.* Пусть прямые AM и BC пересекаются в точке P. Тогда C — середина BP и $HC=BC=CD$.

Задачи на доказательство и вычисление

1.27. $60°$, $60°$, $120°$, $120°$. **1.28.** 2. **1.29.** 49. **1.30.** 1,2. **1.31.** $\sqrt{3}:3$. **1.32.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **1.33.** 12. **1.34.** $\frac{a}{2}$. **1.35.** $30°$, $60°$, $90°$. **1.36.** $\sqrt{11}$.

§ 2. Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

2.1. $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. **2.2.** $30°$. **2.3.** 270. **2.4.** $\frac{19}{2}$. **2.5.** 30. **2.6.** $\sqrt{10}$. **2.7.** 6. **2.8.** $60°$. **2.9.** $\arccos\frac{4m^2-a^2-b^2}{2ab}$.

Тренировочные задачи

2.10. 48. **2.11.** 8. У к а з а н и е. См. пример 3. **2.12.** 64. **2.13.** $48\sqrt{6}$. **2.14.** $\frac{245}{8}$. **2.15.** $\frac{1323}{20}$. **2.16*.** $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2-4a^2}$. У к а з а н и е. Суммы квадратов расстояний от любой точки до противоположных вершин прямоугольника равны между собой. Пусть M — середина AB, а K — проекция точки E на AB. Тогда M — центр прямоугольника $ACBF$, K — середина DM, $OF=2EM=2ED$.

Задачи на доказательство и вычисление

2.17. 48. **2.18.** 10. **2.19.** 2,4. **2.20.** 7. **2.21.** 2. **2.22.** 1125. **2.23.** 30. **2.24.** $2\sqrt{13}$, $4\sqrt{13}$, $6\sqrt{5}$.

§ 3. Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

3.1. 20. **3.2.** $\sqrt{2}$. **3.3.** ab. **3.4.** 4; 8; 4; 8. **3.5.** 1. **3.6.** $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{2}$. **3.7.** 2.

Тренировочные задачи

3.8. $4\sqrt{2}$, 18. **3.9.** $|a-b|$. **3.10.** 14. **3.11.** 48. **3.12.** $\frac{ab}{4}$. **3.13.** 5. **3.14.** $\frac{ab}{2}$. **3.15.** $\frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2\pm cd\sqrt{2}}$. **3.16.** $\sqrt{42}$. **3.17.** $60°$, $120°$. **3.18.** 5. **3.19.** $a+b$. **3.20.** $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$. У к а з а н и е. Опишите около указанного квадрата ещё один квадрат со стороной $a+b$, проведя через вершины данного квадрата, отличные от вершин треугольника, две прямые, перпендикулярные прямым, содержащим катеты треугольника. Центр полученного квадрата совпадает с центром данного. **3.21.** $90°$. У к а з а н и е. Пусть K, L, M и N — середины отрезков AD, AC, BC и BD соответственно. Тогда $KLMN$ — прямоугольник. **3.22.** $\sqrt{\frac{13}{3}}$ или $\sqrt{\frac{19}{3}}$. У к а з а н и е. Отрезок, соединяющий вершины данных равнобедренных треугольников, проходит через центр параллелограмма.

3.23. 4. Указание. Пусть DD_1 — диаметр окружности. Тогда расстояние от центра окружности до хорды AB равно расстоянию от центра окружности до хорды CD_1, равной AB. **3.24*.** 4. Указание. Пусть F — середина AD. Тогда $MKNF$ — параллелограмм, PQ — средняя линия треугольника KFL, а FL — средняя линия треугольника ADE.

Задачи на доказательство и вычисление

3.25. 50. **3.26.** 36. **3.27.** 3. **3.28.** $2\sqrt{5}$. **3.29.** 30. **3.30.** 2,4. **3.31.** $\operatorname{ctg}\alpha$. **3.32.** 4. **3.33.** $12(2-\sqrt{3})$.

§ 4. Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

4.1. 450. **4.2.** 54. **4.3.** 1024. **4.4.** 25. **4.5.** 39 или 9. **4.6.** 5. **4.7.** 90°. **4.8.** 9. **4.9.** 120°. **4.10.** $\dfrac{a-b}{2}$. **4.11.** $\dfrac{a^2-b^2}{4}$.

Тренировочные задачи

4.12. 4 : 3. **4.13.** $\sqrt{\dfrac{S}{\sin\alpha}}$. **4.14.** $\sqrt{ab}$. **4.15.** $\dfrac{10}{3}R$, $4R$, $2R$. **4.16.** $\sqrt{b^2+\dfrac{a^2}{4}}$. **4.17.** 4; $\dfrac{5\sqrt{41}}{4}$. **4.18.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+6ab+b^2}$. **4.19.** 900 или 780. **4.20.** $\dfrac{ab}{4}$. **4.21.** $8\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$. **4.22.** $\dfrac{h}{\sqrt{3}}$. **4.23.** 40° или 80°. **4.24.** 14; 12,5; 29,4; 16,9. **4.25.** $\dfrac{63\sqrt{3}}{4}$. **4.26.** 13. **4.27.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Указание. Если сумма углов при основании трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований. **4.28.** 28 или $2\sqrt{181}$. **4.29.** $\dfrac{3}{4}ab$. **4.30.** $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. **4.31.** 22. Указание. Точка D лежит на окружности с центром C, проходящей через точки A и B. **4.32.** $\dfrac{3}{2}S$ или $\dfrac{1}{2}S$. **4.33.** 75°, 75°, 105°, 105°. Указание. Рассмотрите треугольник с вершинами в центре окружности, в середине боковой стороны и в середине радиуса, проведённого в точку касания окружности с основанием BC. **4.34.** 30°, 30°, 150°, 150°. **4.35.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2}$. Указание. Точки A, B и D лежат на окружности с центром C. Если DK — диаметр этой окружности, то $BK=AD$ и $\angle DBK=90°$. **4.36*.** 45°, 135°. Указание. Боковая сторона данной трапеции равна проекции диагонали на большее основание. **4.37*.** 3 : 29. **4.38*.** $\sqrt{S}$. Указание. Точка M лежит на прямой, проходящей через точки касания окружности с основаниями трапеции. Эта прямая содержит O — центр окружности, поэтому $S_{\Delta CMD}=S_{\Delta AMB}=S_{AOB}$.

Задачи на доказательство и вычисление

4.39. 20. **4.40.** 120. **4.41.** $1:2$. **4.42.** $\frac{4ab}{3a+b}$ или $\frac{4ab}{a+3b}$. **4.43.** 7. **4.44.** 4,8. **4.45.** 8. **4.46.** 10. **4.47.** 6. **4.48.** $4:\sqrt{5}$. **4.49.** $\sqrt{ab}$. **4.50.** 78.

§ 5. Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

5.1. 9,6. **5.2.** 2. **5.3.** $\sqrt{5}$. **5.4.** 8. **5.5.** $\frac{ab}{a+b}$. **5.6.** $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. **5.7.** $\frac{24\sqrt{3}}{7}$. **5.8.** 4,8.

Тренировочные задачи

5.9. $\frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\alpha}$; $\frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\beta}$; $\frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\gamma}$. **5.10.** $\frac{29}{5}$. **5.11.** 13,44. **5.12.** 75. **5.13.** $\frac{a^3b}{2(a^2+b^2)}$. **5.14.** $\frac{a^3b^3}{(a^2+b^2)^2}$. **5.15.** 6. **5.16.** $d\sqrt{2+\frac{d}{c}}$. **5.17.** $\frac{24}{\sqrt{145}}$. **5.18.** $\frac{mn(m+n)}{m^2+n^2}$. **5.19.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 7. **5.20.** 5. **5.21.** $\frac{4\sqrt{6}}{5}$. У к а з а н и е. Треугольник ABC равнобедренный. **5.22.** $CD=\sqrt{6}$, $CE=\frac{8}{5}$, $DE=\frac{\sqrt{34}}{5}$, $\rho=2\sqrt{\frac{2}{5}}$. **5.23.** $\frac{2\cos\frac{\alpha}{3}+3}{6\cos\frac{\alpha}{3}+1}$. **5.24.** 2; $S=\operatorname{tg}72^\circ=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. У к а з а н и е. Пусть прямая, проведённая через точку D параллельно BC, пересекает сторону AC в точке E. Треугольники ADE и CBD равны по двум сторонам и углу между ними. **5.25*.** $\alpha b - 2a$ У к а з а н и е. Если r — радиус окружности, вписанной в треугольник KLM, то $S_{\triangle KLP}=\frac{1}{2}(KL+LP)r$, $S_{\triangle ELR}=\frac{1}{2}(EL+LR)r$.

Задачи на доказательство и вычисление

5.26. $3\sqrt{5}$. **5.27.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **5.28.** 2,4. **5.29.** 113. **5.30.** $2\sqrt{6}$. **5.31.** $\frac{60\sqrt{2}}{7}$. **5.32.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, R.

§ 6. Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

6.1. $1:7$, считая от C. **6.2.** $2:1$, считая от точки B. **6.3.** $5:24$. **6.4.** $8:13$. **6.5.** $20:21$; $6:35$. **6.6.** $5:6$; $8:25$. **6.7.** $1:2$. **6.8.** $1:6$, считая от точки A. **6.9.** $1:3$, считая от точки A. **6.10.** $\frac{a+b}{c}$.

Тренировочные задачи

6.11. $n:m$. **6.12.** $3:1$, считая от вершины A. **6.13.** $1:1$. **6.14.** 4. **6.15.** 10. **6.16.** $2\sqrt{6}$. **6.17.** $1:3$. **6.18.** $3:1$. **6.19.** $1:4$. **6.20.** $\sqrt{13}$. **6.21*.** $1:2$. **6.22*.** а) $1:1, 5:9$; б) $5:21$. **6.23*.** $4:3$. Указание. Пусть D и E — середины хорд MN и BC соответственно, O — центр окружности. Тогда $AP\cdot AE = AD\cdot AO = AM^2 = AB\cdot AC$.

Задачи на доказательство и вычисление

6.24. $1:1$. **6.25.** $3:1$. **6.26.** $2:3$. **6.27.** 9. **6.28.** 4 и 12. **6.29.** 90°, 90°, $\arcsin\frac{3}{5}$, $180^\circ-\arcsin\frac{3}{5}$. **6.30.** $1:3$. **6.31.** 40. **6.32.** $2\sqrt{7}$. **6.33.** $9:16$.

§ 7. Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

7.1. 1. **7.2.** $\frac{13}{20}$. **7.3.** $\frac{2}{15}$. **7.4.** $\frac{1}{3}$. **7.5.** $\frac{1}{3}$. **7.6.** $18\sqrt{2}$. **7.7.** $\frac{S}{2}$.

Тренировочные задачи

7.8. $2\sqrt{S_1S_2}$. **7.9.** $\frac{1}{4}$. **7.10.** $\frac{2mn}{(m+n)^2}$. **7.11.** $\frac{S_1+S_2}{2}$. **7.12.** 120. **7.13.** $(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^2$. **7.14.** $\frac{10}{3}$. **7.15.** $\frac{S}{2}$. **7.16.** $2S$. **7.17.** $\frac{ab}{(a+b)^2}$. **7.18.** $\frac{1}{5}$. **7.19.** $\frac{b(3a+b)S}{2(a+b)(2a+b)}$. **7.20.** $2:1$. **7.21.** $\frac{1}{3}d$. **7.22.** 45°, 90°, 45°. **7.23.** $9\sqrt{\frac{2}{7}}$. **7.24.** $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$. **7.25.** $\frac{2\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2-S_2^2}}$. **7.26.** 3. **7.27.** $\frac{abc}{kmc+nma+knb}$. **7.28.** $\frac{(l\sin\gamma+m\sin\alpha+n\sin\beta)^2}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$. **7.29.** $2\sqrt{pq}$. **7.30.** $13:23$. **7.31.** $1+3k$. **7.32.** $\frac{1}{7}$.

Задачи на доказательство и вычисление

7.33. $1:3$. **7.34.** $1:6$. **7.35.** $9:16$. **7.36.** $1:3$. **7.37.** $5:9$. **7.38.** $12:25$. **7.39.** 3. **7.40.** $7:20$. **7.41.** 3, 12, 6, 6. **7.42.** 3. **7.43.** 2.

§ 8. Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

8.1. 45°. **8.2.** 80°. **8.3.** 12 и 20. **8.4.** $1:3$, считая от точки O. **8.5.** 9. **8.6.** 24. **8.7.** $2(r+R)$ или $2(R-r)$. **8.8.** $\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **8.9.** 90°. **8.10.** $r^2(2\sqrt{3}+3)$. **8.11.** $\frac{a+b}{2}$. **8.12.** 8 и 15.

Тренировочные задачи

8.13. 2. **8.14.** $\frac{20}{3}$. **8.15.** 48 и 30. **8.16.** 14. **8.17.** 10. **8.18.** 15 или 3. **8.19.** $\frac{4a}{7}$, $\frac{5a}{7}$. **8.20.** $\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$. **8.21.** $\frac{120}{17}$. **8.22.** $\sqrt{2ar}$. **8.23.** 90°, 45°, 45° или 90°, arctg 3, arcctg 3. **8.24.** $\sin 2\alpha$. **8.25.** $2\sqrt{9+6\sqrt{2}}$. Указание. Если O — центр окружности, то прямоугольный треугольник OBC — равнобедренный. **8.26.** $\frac{150}{7}$. **8.27.** $\frac{7}{3\sqrt{3}}$. Указание. Если данная окружность касается прямых BC и AB в точках P и Q соответственно, а AH — высота треугольника ABC, то $\frac{AH}{OP}=\frac{AM}{OM}=\frac{2}{3}$, а полупериметр треугольника ABC равен отрезку AQ. **8.28.** 8. Указание. Опустите перпендикуляры из центров окружностей на хорду AB.

Задачи на доказательство и вычисление

8.29. 49. **8.30.** 90°. **8.31.** $2(2+\sqrt{3})$. **8.32.** $3\sqrt{3}$. **8.33.** 11. **8.34.** $\frac{9R^2\sqrt{3}}{4}$. **8.35.** $2\sqrt{41}$. **8.36.** 32 и 16. **8.37.** 8.

§ 9. Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

9.1. R, 60°, 60°, 60°. **9.2.** 9. **9.3.** 84. **9.4.** 4. **9.5.** 24. **9.6.** 55. **9.7.** $R(\sqrt{2}+1)$. **9.8.** 2. **9.9.** $\frac{|R^2-a^2|}{2R}$. **9.10.** 60°. **9.11.** $3r$. **9.12.** 1 : 3. **9.13.** $6r\sqrt{3}$. **9.14.** $R(2\sqrt{3}-3)$. **9.15.** $\frac{a+b}{2}$.

Тренировочные задачи

9.16. 8. **9.17.** $3\sqrt{2}$. **9.18.** $\frac{a^2+4r^2}{4r}$. **9.19.** 3 : 2 или 1 : 2. **9.20.** $\frac{a}{4}\operatorname{tg}\alpha$, $\frac{a}{4}\operatorname{ctg}\alpha$. **9.21.** 7. **9.22.** $\frac{2rR}{r+R}$. **9.23.** $\frac{ar}{2r+a}$. **9.24.** 8. **9.25.** 30°. **9.26.** 3 : 2. **9.27.** 3. **9.28.** $2\sqrt{Rr}$, $2r\sqrt{\frac{R}{R+r}}$, $2R\sqrt{\frac{r}{R+r}}$. **9.29.** $\frac{Rr}{(\sqrt{R}\pm\sqrt{r})^2}$. **9.30.** 6. **9.31.** $\frac{15}{4}$; $\frac{20}{3}$. **9.32.** 1. **9.33.** 12. **9.34.** $\frac{9}{4}$ или $\frac{9}{2}$. **9.35.** $\frac{9}{20}$ или $\frac{9}{10}$. **9.36.** $2\pm\frac{4}{3}\sqrt{2}$. **9.37.** $2\sqrt{21}-9$ или $3+2\sqrt{3}$. **9.38.** $\frac{rR\sqrt{3}}{\sqrt{r^2-rR+R^2}}$. **9.39.** $a\sqrt{1\pm\frac{r}{R}}$. **9.40.** $b\sqrt{k^2\pm k}$. **9.41.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **9.42.** $2\sqrt{2}$. **9.43.** 12π. **9.44.** $\frac{R\sqrt{3}}{4}$. **9.45.** $2r\sqrt{5}$. **9.46.** $\frac{4(2\pm\sqrt{3})}{3}$. **9.47*.** $\frac{a}{2}$. Указание. Примените формулу Герона. **9.48*.** $\frac{2rR}{R-r}$. Указание. Точка пересечения прямых AB и MN лежит на прямой, проходящей через центры первых двух окружностей.

Задачи на доказательство и вычисление

9.49. $3\sqrt{13}$. **9.50.** 1 и 4. **9.51.** 26. **9.52.** $\frac{15}{8}$. **9.53.** $1:2$. **9.54.** 2. **9.55.** 3,2. **9.56.** 3. **9.57.** $80\sqrt{3}$. **9.58.** $2r$.

§ 10. Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

10.1. 24. **10.2.** $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$, $\frac{2a}{\sqrt{3}+1}$ или $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$, $\frac{2a}{\sqrt{3}-1}$. **10.3.** $2\sqrt{3}$. **10.4.** a. **10.5.** $\frac{a+b}{2}$ или $\frac{|a-b|}{2}$. **10.6.** $\frac{b}{2}$.

Тренировочные задачи

10.7. $\frac{384}{25}$. **10.8.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **10.9.** $\frac{6}{\sqrt{5}}$. **10.10.** $\frac{n-m}{2m}$. **10.11.** $a\cos\alpha$. **10.12.** $|\operatorname{ctg}\alpha|\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$. **10.13.** $\frac{5+\sqrt{15}}{4}$.

Задачи на доказательство и вычисление

10.14. 90°. **10.15.** 15. **10.16.** 2. **10.17.** $2\sqrt{85}$. **10.18.** 4,8. **10.19.** $2-\sqrt{3}$. **10.20.** $4\sqrt{97}$. **10.21.** 9,6. **10.21.** 62,5.

§ 11. Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

11.1. 4. **11.2.** 30° или 150°. **11.3.** $R^2\operatorname{tg}\alpha$. **11.4.** $\frac{a+b-c}{2}$. **11.5.** $\frac{5}{2}$, 1, 6, 3, 2. **11.6.** $\frac{169}{24}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{15}{2}$, 12, 12. **11.7.** $\frac{65}{8}$, 4, $\frac{21}{2}$, 12, 14. **11.8.** $\frac{b-a}{2}$. **11.9.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **11.10.** $\frac{85}{8}$.

Тренировочные задачи

11.11. Вне; $\frac{3\sqrt{14}}{5}$. **11.12.** $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, $\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}$. **11.13.** $2R\sqrt{2}$. **11.14.** $\sqrt{3}$. **11.15.** $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$ или $2\sqrt{3}, \sqrt{3}$. **11.16.** 165° или 105°. **11.17.** $\frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **11.18.** $\frac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$. **11.19.** $2\sqrt{\frac{34}{15}}$. **11.20.** $\frac{br}{c}$. **11.21.** 36°, 36°, 108°. **11.22.** $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sin 2\varphi$. **11.23.** $\frac{1}{2}(p-a)^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **11.24.** $\frac{1}{2}p(p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **11.25.** 13 и 15. **11.26.** 5. **11.27.** 16. **11.28.** $4\sqrt{3}$. **11.29.** 1. **11.30.** 2. **11.31.** $b+p$. **11.32.** $\frac{4R^3}{S}$. **11.33.** $9:14$. **11.34.** 2. **11.35.** $30^\circ, 90^\circ$. **11.36.** $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **11.37.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. **11.38.** $\frac{8}{5}R^2$. **11.39.** $\sqrt{3}$. **11.40.** 45°.

Задачи на доказательство и вычисление

11.41. 30. **11.42.** $\frac{575}{14}$. **11.43.** $\frac{7\pi}{3}$. **11.44.** 7. **11.45.** 4. **11.46.** 40. **11.47.** $\frac{55}{7}$. **11.48.** 26. **11.49.** 2,4.

§ 12. Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

12.1. $2\sqrt{ab}$. **12.2.** $\frac{ac+bd}{a}$. **12.3.** 1. **12.4.** 12 или $3\sqrt{2}$. **12.5.** 0,2. **12.6.** $|R^2-d^2|$. **12.7.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **12.8.** $\frac{2ar}{\sqrt{r^2+a^2}}$. **12.9.** $\sqrt{2a(a+b)}$ или $\sqrt{2b(a+b)}$. **12.10.** 90°.

Тренировочные задачи

12.11. $\frac{17}{4}$. **12.12.** $\frac{a}{2\sin\alpha}\left(\sqrt{\sin^2\beta+8\sin^2\alpha}-\sin\beta\right)$. **12.13.** $\frac{\sqrt{5}}{6}$. **12.14.** $\sqrt{2}$. **12.15.** $\frac{3}{2}(\sqrt{5}\pm 1)$. **12.16.** $\sqrt{5}\pm 1$. **12.17.** 210. **12.18.** $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin\frac{\alpha}{2}}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **12.19.** $\sqrt{10}$. **12.20.** $\frac{11}{10}$. **12.21.** $\frac{5}{3}$. **12.22.** $\frac{16}{5}$. **12.23.** $\frac{8}{5}$. **12.24.** 2. **12.25.** $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$. **12.26.** 40. **12.27.** $\frac{a+b-2\sqrt{ab}\cos\alpha}{2\sin\alpha}$. **12.28.** 1. **12.29.** $2(5\pm 2\sqrt{3})$. **12.30.** $\sqrt{ab}$. **12.31.** $5:10:13$. **12.32.** $\sqrt{rR}$, $\sqrt{\frac{r}{R}}$. **12.33*.** $8k-1$. **12.34*.** $\sqrt{3}$.

Задачи на доказательство и вычисление

12.35. 2. **12.36.** 5. **12.37.** 4,5. **12.38.** $\frac{R\sqrt{7}}{2}$. **12.39.** $9:4$. **12.40.** $12\sqrt{5}$. **12.41.** 40, 68, 75, 51. **12.42.** 5. **12.43.** 16. **12.44.** $\frac{ab}{a-b}$.

§ 13. Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

13.1. 110° и 250°. **13.2.** $\angle MAB=\angle NAC=40^\circ$ или $\angle MAB=\angle NAC=140^\circ$. **13.3.** 35° или 55°. **13.4.** 40°, 80°, 60° или 60°, 20°, 100°. **13.5.** 96°, 132°, 84°, 48°. **13.6.** 3. **13.7.** 25°. **13.8.** $\frac{a}{2|\cos\beta|}$. **13.9.** 50°. **13.10.** 25°. **13.11.** 81°. **13.12.** $\sqrt{2}$. **13.13.** $\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$.

Тренировочные задачи

13.14. $\dfrac{a\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin(\beta+\alpha)}$. **13.15.** $\angle BAC=110^\circ$, $\angle BCA=30^\circ$, $\angle DCA=60^\circ$, $\angle DAC=80^\circ$. **13.16.** 80°. **13.17.** 30°, 40°, 110°. **13.18.** $\arcsin\frac{a}{b}$. **13.19.** $\frac{5}{27}\pi$. **13.20.** $\frac{a}{2}$.

13.21. 1; 1; $\sqrt{3}$; 120°; 30°; 30°. **13.22.** $90° + \alpha$, если $\alpha \leqslant 45°$; $90° - \alpha$, если $\alpha > 45°$. **13.23.** $\frac{c\sqrt{3}}{3}$. **13.24.** 80°. **13.25.** 15°. **13.26.** $2r^2 \sin^2\alpha \sin 2\alpha$. **13.27.** $\frac{8}{3}$. **13.28.** $\frac{\sqrt{49 - 9\operatorname{tg}^2\alpha}}{2\sin\alpha}$. **13.29.** $\frac{2}{3}$. **13.30.** $\frac{1}{4\cos^2\alpha}$. **13.31.** 90°, 60°, 30°. **13.32.** $180° - 2\alpha$. Указание. Точка M лежит на окружности с центром B, проходящей через точки A и C. **13.33.** $\frac{185}{8}$. Указание. Точка Q лежит на окружности с центром P, проходящей через точки M и N. **13.34.** $a^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Указание. $BK = CK$. **13.35.** $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **13.36.** $\sqrt{3}$. Указание. Из центров O_1 и O_2 окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, отрезок AD виден под одним и тем же углом. Центр окружности, проходящей через точки O_1, O_2, A и D, лежит на описанной окружности четырёхугольника $ABCD$. **13.37*.** $\angle A = 60°$, $\angle B = 15°$, $\angle C = 105°$ или $\angle A = 60°$, $\angle B = 105°$, $\angle C = 15°$. Указание. Рассмотрите два случая: угол B тупой или острый. Точки M, N и середины сторон AB и AC лежат на одной окружности. **13.38*.** 1. Указание. Пусть D — точка касания полуокружности со стороной BC. Из точек D и O отрезок QM виден под одним и тем же углом, MQ — высота треугольника MON, $PQ = \frac{1}{2}MN$.

Задачи на доказательство и вычисление

13.39. 48. **13.40.** 6. **13.41.** 216. **13.42.** 4. **13.43.** 24. **13.44.** 8. **13.45.** $24\sqrt{3}$. **13.46.** $\operatorname{arctg} 3$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. **13.47.** 16.

§ 14. Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

14.1. 4, 8, 12, 16. **14.2.** 10. **14.3.** $\frac{3a + 2b}{5}$. **14.4.** $\frac{4a - b}{5}$. **14.5.** $\frac{24}{7}$. **14.6.** 12. **14.7.** $\frac{1}{2}$. **14.8.** 1 и 3. **14.9.** 4, 6, 4, 6.

Тренировочные задачи

14.10. 1 и 2. **14.11.** 35. **14.12.** 1 : 1. **14.13.** $\frac{2ab}{a+b}$. **14.14.** $\frac{4r\sqrt{rR}}{R+r}$. **14.15.** $\sqrt{\frac{3a^2 + 2b^2}{5}}$ или $\sqrt{\frac{2a^2 + 3b^2}{5}}$. **14.16.** 2. **14.17.** 5, 20, $\frac{25}{2}$, $\frac{25}{2}$. **14.18.** 2. **14.19.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **14.20.** $\sqrt{ab}$. **14.21.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **14.22.** $\frac{mc}{n}$. **14.23.** $\sqrt{a(a+b)}$. **14.24.** $\sqrt{pq}$. **14.25.** $\frac{ap}{c}$. **14.26.** 2. **14.27.** $\sqrt{2}$. **14.28.** $\frac{R^2}{a}$. **14.29.** $\sqrt{pq}$. **14.30.** $\sqrt{a(a-b)}$. Указание. Треугольники AEF и EDF подобны.

14.31*. $\dfrac{bc}{a}$. Указание. Пусть AK и DL — высоты треугольников ABN и DCM. С помощью метода вспомогательной окружности докажите подобие этих треугольников. **14.32*.** $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$. Указание. Точка M — середина высоты BH. **14.33*.** $\sqrt{ab}$. Указание. AM — биссектриса угла BAC, треугольники ABM и BDM подобны. **14.34*.** $\dfrac{ac}{b}$. Указание. Пусть точки K, L, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из вершины A на прямые BC, DC, DE и BE соответственно. Треугольники AKL и ANM подобны.

Задачи на доказательство и вычисление

14.35. 4. **14.36.** 40. **14.37.** 45°, 45°. **14.38.** $\dfrac{aR}{m}$. **14.39.** 60°. **14.40.** $1:3$. **14.41.** 12. **14.42.** 3. **14.43.** $1:3$. **14.44.** $7+4\sqrt{3}$.

§ 15. Задачи на вычисление

Подготовительные задачи

15.1. 1. **15.2.** $S\cos^2\alpha$. **15.3.** 60°, 40°, 80°. **15.4.** 30°. **15.5.** $\dfrac{c(a^2+b^2-c^2)}{4ab}$. **15.6.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2+ac}$. **15.7.** $\sqrt{a^2+b^2\pm 2abk}$. **15.8.** 10.

Тренировочные задачи

15.9. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **15.10.** $8\sqrt{3}$ или 24. **15.11.** 60° или 120°. **15.12.** 45° или 135°. **15.13.** $\dfrac{25}{\sqrt{39}}$. **15.14.** 45°, 75°, 60°. **15.15.** 30°. **15.16.** $\dfrac{24}{5}$. **15.17.** 13. Указание. Продлите высоты треугольника до пересечения с описанной окружностью. Получится треугольник, подобный данному с коэффициентом 2. **15.18.** 340. **15.19.** $\dfrac{5a}{8}$. Указание. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Тогда M — середина HP, N — середина HQ, а треугольник BMN подобен треугольнику BAC с коэффициентом $\cos\angle B$. **15.20.** $\dfrac{1}{2}a^2\operatorname{ctg}\alpha$. Указание. $QN\perp ST$. **15.21*.** $\dfrac{m^2-h^2}{2h}$. Указание. Пусть F — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности треугольника ABC, N_1 — точка пересечения с этой окружностью продолжения биссектрисы AN. Тогда $AF=2OM$, N — середина AN_1, а треугольник ONN_1 прямоугольный.

Задачи на доказательство и вычисление

15.22. $4\sqrt{2}$, 2. **15.23.** 3,5. **15.24.** 30°. **15.25.** 2. **15.26.** $\dfrac{1}{6}$. **15.27.** $2:1$, считая от точки B_1. **15.28.** 510.

Диагностическая работа 1

1. $\frac{1}{2}$ или $\frac{9}{2}$. **2.** $\frac{240}{17}$. **3.** $58°$. **4.** 1180. **5.** 3. **6.** $\frac{24}{5}$; 3; 4; 3; 4.

Диагностическая работа 2

1. $2\sqrt{97}$, 48. **2.** $2R$. **3.** 0,3. **4.** $2\sqrt{3}$. **5.** $\frac{36}{5}$. **6.** a.

Диагностическая работа 3

1. $2\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$. **2.** $2(r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+2R\sin\alpha)$. **3.** 8, 6 или 4, 12. **4.** $\sqrt{a(a+b)}$, $\sqrt{b(a+b)}$.
5. 4. **6.** $\frac{(a+b)^2}{4}$.

Диагностическая работа 4

1. 15. **2.** $2(\sqrt{2}\pm 1)$. **3.** $\frac{6}{5}$. **4.** $\sqrt{97}$ или $\sqrt{57}$. **5.** 4. **6.** $1+\sqrt{3}$.

Диагностическая работа 5

1. 6. **2.** 96. **3.** $\frac{2rR\sqrt{rR}}{r+R}$. **4.** $\frac{2}{3}$. **5.** $\frac{1}{3}$ или $\frac{9}{11}$. **6.** $\frac{1}{3}$.

Диагностическая работа 6

1. 1 или 4. **2.** $\frac{a}{2}$. **3.** 2. **4.** $\frac{20\sqrt{5}}{3}$. **5.** 6 или 4. **6.** R.

Содержание